COLECCIÓN DIDÁCTICA
PRIMARIA

Didáctica de las Matemáticas



Coordinadora:
Mª del Carmen Chamorro

Didáctica de las Matemáticas para Primaria

Didáctica de las Matemáticas para Primaria

Coordinadora y autora:
María del Carmen Chamorro
Catedrática de E.U. de Didáctica de las Matemáticas,
Universidad Complutense de Madrid

Coautores (por orden alfabético):
Juan Miguel Belmonte Gómez
Profesor Titular de E.U., Universidad Complutense de Madrid
Salvador Llinares
Catedrático de U., Universidad de Alicante
María Luisa Ruiz Higueras
Catedrática de E.U., Universidad de Jaén
Francisco Vecino Rubio
Profesor Titular de U., Universidad Complutense de Madrid

Director de la Colección Didáctica
Antonio Medina Rivilla



Madrid • México • Santafé de Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Lima
Montevideo • San Juan • San José • Santiago • Sâo Paulo • White Plains

Datos de catalogación bibliográfica

M.ª del Carmen Chamorro (Coord.)
Didáctica de las Matemáticas para Primaria
PEARSON EDUCACIÓN, Madrid, 2003

ISBN 10: 84-205-3454-4
ISBN 13: 978-84-205-3454-1
Materia: Didáctica y metodología 37.02

Formato: 170 x 240 Páginas: 368

Ribera del Loira, 28
28042 Madrid (España)

PEARSON PRENTICE HALL es un sello editorial autorizado de PEARSON EDUCACIÓN

M.ª del Carmen Chamorro (Coord.)
Didáctica de las Matemáticas para Primaria

ISBN 10: 84-205-3454-4
ISBN 13: 978-84-205-3454-1
Depósito Legal: M-13.988-2006

Última reimpresión, 2006

Editor: Juan Luis Posadas
Técnico editorial: Elena Bazaco
Equipo de producción:
Director: José Antonio Clares
Técnico: José Antonio Hernán
Diseño de cubierta: Equipo de Diseño de PEARSON EDUCACIÓN, S. A.
Composición: DiScript Preimpresión, S. L.

IMPRESO EN MÉXICO - PRINTED IN MEXICO

SUMARIO

Prólogo

Aunque la Didáctica de las Matemáticas es un área de conocimiento bastante moderna, cuenta ya en su haber con múltiples resultados de investigación que nos ayudan a desentrañar el complejo proceso por el cual se forman los conceptos matemáticos, y puede por tanto aportar análisis y soluciones, al menos localmente, al fenómeno del fracaso escolar y al secular temor, cuando no odio, que una gran mayoría de niños y adultos experimentan cuando se enfrentan a actividades matemáticas.

Los autores de este libro deseamos fomentar en el lector la reflexión sobre el hecho de enseñar matemáticas y la manera más adecuada de hacerlo a la luz de las recientes investigaciones. Este manual pretende aportar una síntesis de los resultados más importantes que el futuro profesor o el profesor veterano, no pueden ignorar a la hora de enseñar matemáticas.

En los albores del siglo XXI no es sostenible que enseñar sea sólo un arte, y en cualquier caso, todo arte requiere de una técnica-soporte, que se hace evidente en los casos de la pintura, la escultura, la música, la poesía o la arquitectura, por poner algunos ejemplos. Enseñar es una profesión bien definida, aunque no exenta de cambios en los cometidos a desarrollar, por lo que el maestro debe adquirir unos conocimientos, una cultura profesional específica que va más allá de los meros contenidos disciplinares.

La Educación Primaria, a cuyo profesorado se dirige este libro, tiene fijados, desde hace mucho tiempo, los contenidos matemáticos que deben ser abordados en este nivel en los países de nuestro entorno cultural, lo que hace que la cuestión clave que se plantean las diversas reformas curriculares tenga casi siempre que ver con cambios metodológicos, y de hecho, las sucesivas reformas han fracasado reiteradamente porque la metodología ha seguido siendo la misma. Por eso, el lector no encontrará en este libro progresiones de enseñanza detalladas para cada uno de los contenidos matemáticos que se abordan en la Educación Primaria, pues para ello se proporciona una bibliografía más detallada; por el contrario, los autores han preferido optar por transmitir una metodología, una manera de hacer en la clase acorde con los principios del aprendizaje matemático, que dinamice las clases y combata la aversión de los alumnos por las matemáticas, implicándolos en su propio aprendizaje.

El lector encontrará, sin embargo, una buena descripción de los errores más habituales de los alumnos de este nivel así como su origen y causas, junto con alguna proposición didáctica de tipo preventivo, que colabore a su no aparición. Hay, también, un tratamiento más detallado de los temas esenciales del currículo de Educación Primaria: la numeración, el cálculo, las magnitudes y su medida, la geometría o las fracciones, y cómo no, la resolución de problemas.

En el texto se han intercalado actividades que consideramos que el lector debe ir resolviendo necesariamente, lo que le ayudará a obtener una autoevaluación sobre la comprensión de lo que ha ido leyendo. Estas actividades son a la

Didáctica de las Matemáticas lo que los problemas son a las Matemáticas, y puesto que no es posible aprender Matemáticas sin resolver problemas…

PARTE I

FUNDAMENTACIÓN

CAPÍTULO 1

Matemáticas escolares y competencia matemática

ÍNDICE

Salvador Llinares

1. Introducción y objetivos

Objetivos

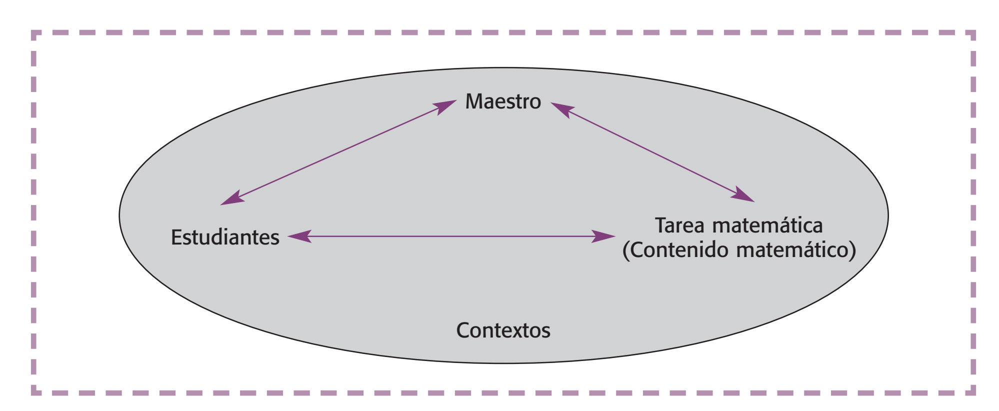
1. Caracterizar la noción «ser matemáticamente competente» en Educación Primaria.
2. Caracterizar la noción de «tarea matemática» como instrumento para desarrollar la competencia matemática.
3. Describir características del «aula de matemáticas» dirigidas a desarrollar la competencia matemática.

En una clase de matemáticas de Primaria, el maestro presenta una tarea matemática a sus alumnos para conseguir un objetivo. En ese momento se define un contexto en el que el maestro, el contenido matemático y los alumnos interaccionan con el fin de que los alumnos desarrollen la competencia matemática que configura el objetivo de enseñanza. Desde esta perspectiva sistémica, las situaciones de enseñanza están determinadas por:

– Las características de la tarea matemática presentada (lo que puede demandar la tarea del resolutor).
– Lo que el maestro hace y las características de las interacciones que se generan.
– Lo que los alumnos aportan a la situación, hagan en ella y su actitud.

Al conjunto de actividades, ejercicios, problemas, etc. que el maestro puede plantear a sus alumnos para desarrollar la capacidad matemática, lo llamaremos «tarea matemática» por economía de lenguaje.

Algunas veces las características de las tareas que los maestros plantean a sus alumnos y las interacciones que se producen en el aula entre el maestro, los alumnos y el contenido matemático definen un determinado nivel de exigencia cognitiva y social que puede potenciar un determinado aprendizaje. Por ejemplo, si la experiencia de un alumno en el aula de matemáticas se reduce a escuchar lo



que dice el maestro, leer lo que pone el libro de texto y repetir ejercicios de cálculo en los que sólo hay que procurar que el resultado sea correcto, lo que aprende este alumno puede ser simplemente el memorizar algoritmos de cálculo y generar una idea sobre las matemáticas escolares reducida a una colección de procedimientos de cálculo.

El significado dado a la actividad matemática por parte del alumno (lo que hace con la tarea para resolverla, sea individual o en grupo) será diferente si las actividades son del tipo de formulación, representación, resolución y/o comunicación de problemas matemáticos a partir de una situación. Esta actividad matemática es la que permitirá desarrollar en los alumnos una determinada «competencia matemática» a lo largo del tiempo. En esta situación existen tres elementos que deben ser caracterizados para poder llegar a maximizar la práctica de enseñar matemáticas:

– El significado de «matemáticamente competente».
– Las características de la «tarea matemática» dirigidas a desarrollar la competencia matemática.
– Las características de la clase que apoyan la generación de la competencia matemática.

Llegar a ser matemáticamente competente está vinculado al desarrollo de la comprensión del contenido matemático. Cuando se comprenden las nociones y procedimientos matemáticos se pueden utilizar de manera flexible adaptándolos a situaciones nuevas y permitiendo establecer relaciones entre ellos y ser utilizados para aprender nuevo contenido matemático. Así, comprender está vinculado a saber cuál es el significado y cómo funcionan los procedimientos, cómo se relacionan unos con otros y por qué funcionan de la manera en que lo hacen. Por tanto, debemos determinar características de las aulas de matemáticas que potencian el desarrollo de la competencia matemática y cuáles pueden ser las características de las tareas (actividades, problemas, ejercicios, etc.) que el maestro puede utilizar para conseguir este fin.

El estudio de estos temas lo haremos a través del análisis de dos situaciones hipotéticas de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de Primaria. La escena 1 recoge:

– Las reflexiones de un profesor de 3er ciclo de Primaria cuando está pensando en la planificación (organización del contenido matemático para enseñarlo) de los «procesos de construcción geométricos».
– La descripción de lo sucedido un día de clase (su gestión de la tarea y lo producido por los alumnos).

La escena 2 describe una situación no prevista por una maestra cuando está enseñando la división con números decimales en 6° de Primaria. Las dos escenas entrelazan tres actividades profesionales del maestro: planificación, gestión de la enseñanza e interpretación/análisis de las producciones de sus alumnos. Todas

estas actividades se describen a través del proceso de reflexión del maestro sobre aspectos de su trabajo. Usaremos las escenas para caracterizar diferentes aspectos de la expresión «matemáticamente competente» y luego, comparando las dos escenas, analizaremos el papel que desempeñan las tareas matemáticas y la forma en la que los profesores las usan para generar los contextos que ayudan a desarrollar la competencia matemática.

ESCENA 1. D. José, un maestro de tercer ciclo de Primaria. Los procesos de construcción geométricos en el tercer ciclo de Primaria

D. José es un maestro encargado del tercer ciclo de Primaria en un colegio con sólo una clase en cada curso y encargado de las matemáticas. Este año D. José cree que el ritmo del curso le permite ser optimista ya que sus clases de 5° y 6° van cumpliendo lo previsto. D. José cree que unas posibles razones del buen ritmo alcanzado es que ha tenido pocos problemas de disciplina y que sus alumnos se han adaptado rápidamente a su manera de trabajar en clase mediante el trabajo en grupo y las discusiones e intercambio de información en el gran grupo. D. José cree que también ha influido la elección de las tareas que les propone a sus alumnos.

En estos días de final del primer trimestre, en 5° curso, está trabajando con sus alumnos las nociones de polígonos regulares e irregulares en el tema de las figuras planas. En este tema ha introducido la noción de polígono, la clasificación de triángulos según los lados (equilátero, isósceles y escaleno) y según los ángulos (rectángulo, acutángulo y obtusángulo) y la clasificación de los cuadriláteros según el paralelismo de sus lados (trapezoide, trapecio y paralelogramo). Al final del tema tiene previsto introducir la noción de simetría y la noción de eje de simetría (situado dentro y fuera de la figura). Una aplicación final de estas nociones es la de estudiar los ejes de simetría en los polígonos. Algunas de las tareas que tiene previstas en su planificación, para que fueran discutidas por los alumnos en pequeño grupo y luego en gran grupo, son plantear cuestiones como las siguientes:

TAREA 1

- *¿Tiene el triángulo escaleno algún eje de simetría?, ¿por qué?*
- *¿Tiene el triángulo isósceles algún eje de simetría?, ¿por qué?*
- *¿Cuántos ejes de simetría tiene un triángulo acutángulo?, ¿por qué?*

Sus alumnos ante este tipo de cuestiones saben que deben proporcionar argumentos y justificaciones del porqué de sus respuestas. Ellos deben convencer tanto a sus compañeros en el pequeño grupo como en el gran grupo.

En estos mismos días en 6° curso tiene planificado los temas relativos a la construcción de triángulos y rectángulos, y la introducción de la noción de

circunferencia y sus diferentes elementos (radio, cuerda, diámetro, arco y semicircunferencia).

Para D. José las tareas que ha visto en algunos textos en las que se pide a los alumnos que construyan triángulos con regla y compás cuando se les proporciona las medidas de los lados son poco atractivas. Como por ejemplo en la tarea siguiente:

TAREA 2

** Sigue estos pasos y dibuja un triángulo cuyos lados midan 5 cm, 6 cm y 6 cm.*

- *Dibuja con la regla un segmento AB de 5 cm.*
- *Abre el compás 6 cm y traza un arco, primero desde el punto A y después desde el punto B.*
- *Llama C al punto donde se cortan los dos arcos. Une el punto C con A y con B.*

¿Cómo es el triángulo que has trazado según sus lados?, ¿y según sus ángulos?

D. José piensa que es necesario que las tareas sean más abiertas en el sentido de generar varios procedimientos de solución y, en particular, en los procesos de construcción. Las tareas deben permitir identificar las propiedades o relaciones geométricas que permiten justificar el proceso de construcción. Una de las tareas que tiene prevista es:

TAREA 3

- *Construir triángulos isósceles utilizando diferentes procedimientos. Describe el procedimiento que utilizas.*
- *Indica qué elementos geométricos utilizas en cada procedimiento.*
- *Busca otro procedimiento diferente.*
- *Recuerda que debes justificar tus respuestas para convencer a tus compañeros.*

Para D. José este tipo de tareas centradas en los procesos de construcción geométricos permiten dar respuesta a uno de los objetivos de las matemáticas en Primaria:

Identificar y construir formas geométricas utilizando el conocimiento de sus elementos y propiedades para incrementar su comprensión y desarrollar nuevas posibilidades de acción.

D. José considera que las tareas de construcción responden a este tipo de objetivo siempre y cuando el proceso de construcción realizado permita explicitar a los estudiantes «el conocimiento geométrico» que lo justifica. Desde ese punto de vista D. José piensa que el significado de la «construcción geométrica» emerge desde:

– La forma en que se realiza la actividad de construir.

– La actividad de discusión matemática relacionada.

Por ello, D. José espera que sus alumnos después de trabajar las tareas en grupo sean capaces de explicar a sus compañeros y defender las estrategias utilizadas.

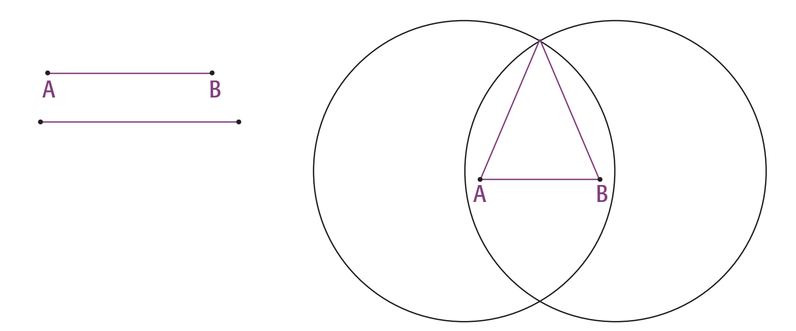
El día en que D. José planteó la tarea 3 a sus alumnos, éstos empezaron a trabajar en grupo mientras él iba de grupo en grupo observando sus discusiones. Después de realizar la tarea en grupos pequeños hubo una sesión de presentación y discusión en el gran grupo. D. José pidió voluntarios para presentar alguno de los procedimientos seguidos. Sus alumnos están acostumbrados a esta forma de trabajar y se disponían a hacer las presentaciones y defensa de sus repuestas.

El portavoz del grupo 1 dice que en su grupo han encontrado un procedimiento utilizando sólo la regla. D. José pide que salgan a la pizarra y expliquen cómo lo han hecho. Antonio, el portavoz del grupo, sale a la pizarra y dibuja con una regla tres segmentos dos de ellos de igual longitud. Después dibuja un triángulo, intentando trasladar sobre el segmento desigual AB, que dice que es la base del triángulo, los otros dos lados utilizando la regla. Antonio dice que lo que han hecho es dibujar dos segmentos iguales desde los extremos del segmento AB, pero que han tenido que ir probando hasta encontrar la «inclinación» adecuada de los segmentos que estaban dibujados sobre la base ya que a veces no se podía cerrar el triángulo. Antonio dijo sonriendo: «*Esto lo hemos tenido que hacer a ojo*».

D. José no realizó ninguna valoración del procedimiento descrito por Antonio y pregunta a otro grupo si han pensado en otro procedimiento diferente. En el grupo 2 Ana, su portavoz, dice que ellos habían pensado inicialmente en un procedimiento parecido (coger dos segmentos iguales y unirlos a un tercero, considerando la definición de triángulo isósceles), pero que luego habían encontrado un procedimiento usando el compás.

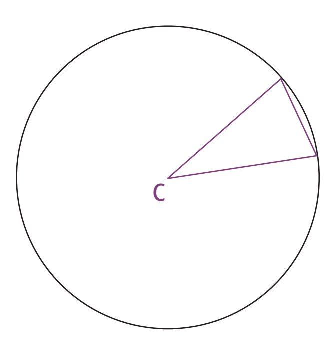
D. José pide a Ana que salga a la pizarra y explique cómo lo han hecho. Ana sale a la pizarra, y con la misma idea que usaron en el grupo de Antonio de que los triángulos isósceles tienen dos lados iguales, pero utilizando regla y compás dibuja un segmento AB, que se usa como base y a continuación con el compás pinchado en un extremo del segmento y con una determinada abertura (dada por la longitud de los segmentos iguales) se dibuja un arco. Repitiendo el procedimiento en el otro extremo del segmento manteniendo la abertura del compás se dibuja otro arco. Ana dijo: *«el punto de corte entre los arcos lo llamamos C y es el otro vértice del triángulo»*.

Ana explicó que se puede hacer así ya que «todos los radios de una circunferencia tienen la misma longitud» y por tanto al pinchar en A y marcar un arco, y al repetir el procedimiento pinchando en B, es decir marcando otro arco con



la misma abertura del compás, se conseguirán dos segmentos con la misma longitud.

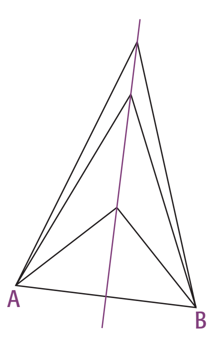
En ese momento, Antonio, el portavoz del grupo que había salido antes, levanta la mano para poder intervenir y dice que usando la idea del grupo de Ana lo que también se puede hacer es dibujar una circunferencia y dos radios cualesquiera. Uniendo los dos extremos de los radios se forma un triángulo isósceles. Antonio indica que eso es verdad porque en una circunferencia todos los radios son iguales y por tanto uniendo los extremos de los radios se obtiene un triángulo isósceles. D. José pregunta al resto de la clase si coinciden con la observación de Antonio. Sus alumnos asienten con la cabeza y D. José felicita al grupo de Antonio por haber sido capaz de utilizar el procedimiento descrito por Ana para encontrar otro procedimiento de construcción. D. José sabe que el argumento utilizado por Antonio, como el procedimiento anterior del grupo de Ana, se apoya en el significado de circunferencia y radio y se siente satisfecho al pensar que sus alumnos están relacionando el significado de la circunferencia y el radio con el significado del triángulo isósceles para generar el procedimiento de construcción de triángulos isósceles.



D. José pregunta a la clase si algún grupo ha encontrado otro procedimiento. Pepa, la portavoz de otro grupo dice que ellos han usado el mismo procedimiento que el grupo de Ana, pero que luego, cuando han hecho las construcciones, se han dado cuenta de que los triángulos isósceles tienen un eje de simetría que coincide con la altura, y que han utilizado esta idea para encontrar otro procedimiento que les permite tener muchos triángulos isósceles.

D. José pide a Pepa que salga y explique lo que han hecho a la clase entera. Pepa sale a la pizarra y dice: *«Un triángulo isósceles tiene un eje de simetría. Si dibujamos un segmento AB para que sea la base y buscamos el punto medio y trazamos la perpendicular a la base por el punto medio (la mediatriz de AB). Para construir la mediatriz utilizamos el procedimiento que el grupo de Ana ha utilizado para encontrar el punto C. Nosotros nos hemos dado cuenta que es el mismo que utilizamos el otro día para dibujar las mediatrices de los segmentos.»*

D. José recuerda que cuando estuvieron trabajando el procedimiento de construcción de las mediatrices de un segmento se había insistido en la idea de que todos los puntos en esa perpendicular equidistan de A y de B. Así, lo que el grupo de Pepa había visto es que con la idea de mediatriz, cualquier punto de esa perpendicular al unirlo con A y B forman un triángulo isósceles. Además lo que se ha obtenido es toda una familia de triángulos isósceles.



D. José resume y recopila las diferentes estrategias que han salido durante la discusión para poder sistematizar toda la información que se ha usado y generado en esta clase. Luego, pone una nueva tarea para el día siguiente pidiendo a sus alumnos que intenten usar las diferentes estrategias e ideas que han aparecido en la clase de hoy y que piensen cuál puede ser más eficaz en cada tarea.

***

La escena 1 describe dos momentos de la vida profesional de un maestro. En primer lugar cuando tiene que pensar en:

– Cómo organizar el contenido matemático para enseñarlo y cómo deben ser las tareas que presente a sus alumnos. Esta tarea de planificación conlleva pensar cuál es la naturaleza de las matemáticas escolares, de qué manera puede responder a la necesidad de formar ciudadanos matemáticamente competentes.

– La forma en que organiza la enseñanza e interacciona con sus alumnos. Durante la interacción con sus alumnos D. José debe interpretar matemáticamente las producciones de sus alumnos, realizar inferencias sobre la eficacia de las tareas propuestas y proponer nuevas cuestiones que

permitan a los alumnos progresar en su desarrollo de la competencia matemática.

D. José ha preparado con cuidado las tareas que ha presentado a sus alumnos y ha estado pendiente de las respuestas producidas durante la discusión intentando «empujar» hacia delante algunos de los procedimientos propuestos. La discusión de diferentes estrategias en la pizarra ha proporcionado a D. José y a alguno de sus estudiantes la posibilidad de relacionar y mejorar algunas de las estrategias inicialmente generadas.

ESCENA 2. El caso de Dª Inés. La división con números decimales en 6° de Primaria

Me llamo Inés y soy profesora del tercer ciclo de Primaria desde hace algunos años. Este año estoy dando 6°. Tengo 28 alumnos en clase. Algunos de ellos son bastante nerviosos pero otros se aplican bien. Estamos juntos desde 5°, así que los conozco relativamente bien y sé lo que se puede esperar de cada uno de ellos. Son la mitad niños y la otra mitad niñas. Su interés por aprender depende de los días, como el tiempo. Hay veces que están muy motivados y otras no tanto.

Durante el segundo trimestre hemos estado trabajando en clase las operaciones con decimales. El año pasado vimos lo que eran los decimales e introduje la suma, la resta y la multiplicación de un decimal por un número natural. Algunas veces he introducido la división entre dos números decimales en 5°, pero este año decidimos trasladarlo a 6°. Así que este año he introducido la multiplicación y la división entre dos números decimales.

La división con decimales resulta a veces un poco más difícil de aprender, pero yo pienso que si los niños se aprenden bien la regla de mover las comas no deberían tener muchos problemas. El libro que estoy utilizando me parece que secuencia bastante bien las tareas para introducir la división. Primero, cuando el divisor es un número natural, luego cuando el dividendo y el divisor son decimales pero el resto es cero. Para el caso de las divisiones exactas una de las tareas que estuvimos haciendo fue realizar aproximaciones de cocientes con números decimales. Los ejercicios que aparecen en el libro de texto y que hemos estado haciendo estos días son del tipo siguiente:

Calcula los cocientes aproximados que se indican

Divisiones no exactas	Aproximación del cociente con una cifra decimal	Aproximación del cociente con dos cifras decimales
41 : 3	41,0 : 3	41,00 : 3
61 : 9		
123 : 11		
144 : 17		

Calcula las siguientes divisiones:

22,5 : 0,15	1,296 : 1,2
22,5 : 1,5	12,96 : 0,12
2,25 : 1,5	1,296 : 0,12

Hoy les he puesto varias divisiones en la pizarra para que copiaran en su cuaderno y las hicieran. Les he recordado la «regla» para dividir números decimales: «tachar la coma en el divisor y correr la coma del dividendo tantos lugares como decimales había en el divisor. Luego realizar la división como con los números naturales». Después de un rato hemos corregido algunas en la pizarra y no había muchas dificultades. Es casi como dividir con números naturales pero teniendo cuidado en mover las comas. Para adelantar, les pedí que en las divisiones que quedaban comprobaran si estaban realizando bien la prueba de la división. Al cabo de un rato, Pepa una de mis alumnas levantó la mano para llamar mi atención. Ella y su compañera Marta habían hecho la siguiente división:

```
7,304  | 23, 1
        --------
```

siguiendo la regla que les había dado en clase: tachar la coma del divisor y correr la coma del dividendo tantos lugares como decimales había en el divisor. Después de realizar los cálculos obtuvieron como cociente 0’31 y resto 143.

```
7 * 3 , 0 4   | 23 * 1
               --------
0   3   7 4     0,31
    1   4 3
```

Habían hecho la prueba pero no les salía. La habían repasado varias veces y decían que no se habían equivocado en las cuentas, pero al realizar la prueba de la división seguía sin salirles bien.

Cuando me llamaron me dijeron que habían movido la coma del dividendo un lugar y habían quitado la coma del divisor, como yo les había enseñando y como lo habían estado haciendo los últimos días con las otras divisiones, pero ahora no les salía la prueba de la división.

***

La lección diseñada por Dª Inés se centraba en el procedimiento de dividir números decimales y las tareas previstas permitían a los estudiantes progresar desde ejemplos simples (recordar división entera) a ejercicios más complicados (realizar diferentes divisiones con números decimales que se diferenciaban simplemente en el lugar de la coma en el dividendo y en el divisor). La característica de estos ejercicios es que eran divisiones exactas. El objetivo de estos ejercicios

era mostrar el «efecto» que tiene el cambio del lugar de la coma en el dividendo y en el divisor sobre el cociente. Al proporcionarles a los alumnos la «regla», Dª Inés intenta favorecer el aprendizaje del algoritmo y conseguir que los alumnos sean eficaces en su aplicación. Sin embargo, Dª Inés no vinculó explícitamente la manipulación de las comas en el dividendo y en el divisor al valor de las unidades en el sistema de numeración decimal, ni a la propiedad fundamental de la división entera con los números naturales.

2. Matemáticas escolares y llegar a ser matemáticamente competente

Dotar de sentido a la expresión «ser matemáticamente competente» está relacionado con los fines de la educación matemática de la etapa, y por tanto contextualizado en un momento en el tiempo. El currículo de matemáticas de la etapa de Primaria expresa en términos de capacidades las finalidades de la formación. Muchas veces la noción de competencia se vincula a una componente práctica «ser capaz de hacer…» y se vincula a saber cuándo, cómo y por qué utilizar determinados instrumentos. Especificar diferentes dimensiones que puedan ayudar a caracterizar el término «ser matemáticamente competente» es relevante para que sea tenido en cuenta por el maestro. El maestro debe organizar el contenido matemático para enseñarlo (planificar) con unos objetivos en mente y, también, debe interpretar las producciones de los alumnos desde las cuales pueda realizar inferencias sobre el aprendizaje conseguido. Así, tanto en la planificación de la enseñanza, durante la gestión de las interacciones con sus alumnos, como en la interpretación y análisis de sus producciones, el maestro debe ser explícito en lo que va a considerar competencia matemática de sus alumnos.

En relación al objetivo de caracterizar lo que puede significar «ser matemáticamente competente» en Primaria, vale la pena subrayar algunos aspectos relevantes de la planificación del maestro en la escena 1. D. José organiza el tiempo para el desarrollo de las tareas integrando el trabajo en gran grupo y en grupos pequeños. Las discusiones tanto en un contexto como en otro se construyen sobre el pensamiento matemático de los alumnos. D. José subraya la necesidad de considerar:

– Las relaciones entre los problemas y las soluciones.
– La naturaleza de las justificaciones y argumentos matemáticos usada por los estudiantes.

Por otra parte, Dª Inés organiza las tareas para que los alumnos lleguen a ser eficaces en el uso de un algoritmo secuenciando para ello las tareas considerando diferentes variables en su estructura que pueden ayudar a sus alumnos a progresar en el uso eficaz del procedimiento. En las escenas descritas es posible identificar diferentes aspectos que ayudan a definir lo que se pueden considerar dimensiones de ser «matemáticamente competente»:

– **Comprensión conceptual** de las nociones, propiedades y relaciones matemáticas. En este caso con la noción de triángulo isósceles, el uso de la noción de circunferencia y radio o el uso de la noción de eje de simetría y mediatriz. La comprensión conceptual se vincula a la posibilidad de establecer relaciones entre conceptos y procedimientos matemáticos en situaciones de resolución de problemas.
– **Desarrollo de destrezas procedimentales** de carácter general y, en particular, las que permiten realizar los procesos de construcción. En la escena 1 el uso de instrumentos de construcción como la regla, la escuadra, el cartabón y el compás. En el caso particular de que D. José y sus alumnos pudieran tener acceso a una sala de ordenadores con un software dinámico (e.g. Cabri Géomètre), las destrezas procedimentales a desarrollar estarían vinculadas al manejo de las primitivas del *software*, como por ejemplo construcción de segmentos, uso de las primitivas «circunferencias», mediatriz, etc.
– **Pensamiento estratégico: formular, representar y resolver problemas.** La respuesta proporcionada por el grupo de Pepa en la clase de D. José exige que los alumnos hayan construido una representación mental de los principales elementos de la situación y las relaciones entre sí (definición de triángulo isósceles, mediatriz de un segmento, eje de simetría, altura de un triángulo…). En este sentido, ser capaces de plantearse problemas nuevos, representarlos mentalmente y resolverlos implica superar los aspectos particulares de la situación.
– **Capacidades de comunicar y explicar matemáticamente.** En este caso, estableciendo un tiempo para la puesta en común de los procedimientos utilizados, y subrayando la necesidad de que los alumnos relacionen los procesos de construcción con los significados de las nociones matemáticas que los justifican. La capacidad de explicar y comunicar matemáticamente lo realizado implica usar las nociones y procesos matemáticos en la comunicación y explicación permitiendo desarrollar su competencia comunicativa.
– **Actitudes positivas en el alumno en relación con sus propias capacidades matemáticas.** La posibilidad de admitir diferentes niveles de sofisticación en las respuestas permite que alumnos con diferentes capacidades matemáticas puedan generar, en sus grupos, resoluciones de la tarea planteada. De esta manera, D. José, en el propio diseño de la tarea al pedir «construir triángulos isósceles utilizando diferentes procedimientos», puede permitir que los diferentes alumnos lleguen a tener confianza en sí mismos y en su capacidad matemática permitiendo la mejora de los propios procedimientos de construcción y valorando positivamente la incorporación de información por parte de los alumnos.

Ser competente matemáticamente debe relacionarse con ser capaz de realizar determinadas tareas matemáticas y comprender por qué pueden ser utilizadas algunas nociones y procesos para resolverlas, así como la posibilidad de argumentar la conveniencia de su uso. El significado que debemos darle a la expresión «matemáticamente competente» está relacionado por tanto con los cinco

aspectos de la actividad matemática identificados desde la escena anterior. La idea de competencia matemática en los alumnos de Primaria hay que entenderla con varias dimensiones que pongan de manifiesto:

- La comprensión conceptual.
- Llevar a cabo procedimientos y algoritmos de manera flexible, eficaz y apropiadamente.
- Habilidades de comunicación y argumentación matemática.
- Pensamiento estratégico: formular, representar y resolver problemas.
- Tener actitudes positivas hacia las situaciones matemáticas.

Desde este punto de vista, el logro de competencia matemática se vincula al desarrollo de las diferentes dimensiones de manera integrada.

2.1. Comprensión conceptual

Una dimensión de la competencia matemática del alumno es la comprensión conceptual que éste puede desarrollar y depende de cómo representa mentalmente y relaciona las diferentes partes del contenido matemático y lo usa en la resolución de problemas (se puede ver el desarrollo de esta idea en el dominio del sentido numérico en Llinares, 2001). El procedimiento de resolución proporcionado por el grupo de Pepa en la clase de D. José muestra, en cierta medida, esa capacidad de relacionar partes del conocimiento matemático para resolver el problema planteado. Es una exigencia para el profesor la posibilidad de que entre los diferentes procedimientos de resolución de las tareas matemáticas propuestas se puedan llegar a presentar y discutir aquellos procedimientos que pongan de manifiesto relaciones entre conceptos que son usados como herramientas para resolver la tarea.

Desde este punto de vista, la tarea 2 de la escena 1 solamente exige memorizar un procedimiento y ser capaz de repetirlo. Por otra parte, la tarea 3 modificada por D. José, al permitir la generación y discusión de diferentes procedimientos, proporciona un espacio para el aprendizaje mucho más poderoso al poder mostrar la relación entre diferentes nociones matemáticas como instrumentos de resolución del problema propuesto. En este sentido, el significado de frases como «comprender bien» está vinculado a las relaciones entre las partes de conocimiento que se establezcan y usan.

Desde el punto de vista de las producciones de los alumnos, los estudiantes en la escena 1 muestran que ven las conexiones entre conceptos y procedimientos relativos a la noción de triángulo isósceles, simetría, circunferencia y radio, además de proporcionar argumentos y justificaciones de por qué pueden usar dichos conceptos para conseguir la construcción pedida. Una inferencia que podemos hacer es que los alumnos pueden estar construyendo nuevo conocimiento al establecer relaciones entre diferentes conceptos y procesos matemáticos y generando una comprensión más amplia de esta parte de las matemáticas escolares.

2.2. Desarrollo de destrezas procedimentales

El desarrollo de las destrezas procedimentales se refiere a conocer los procedimientos matemáticos, conocer cómo y cuándo usarlos apropiadamente, y ser flexible ante la posibilidad de adaptarlos a las diferentes tareas propuestas. Es decir, la destreza en realizar los procedimientos de manera flexible, correcta y eficaz. En cierta medida, el desarrollo de las destrezas procedimentales debe estar vinculado con la comprensión conceptual de los conceptos que fundamentan los procedimientos. Lo descrito en la escena 1 relativo al procedimiento de construcción de figuras geométricas pone de manifiesto que el uso eficaz y flexible de los procedimientos de construcción de figuras geométricas está vinculado a la capacidad de relacionar diferentes conceptos matemáticos. Esta característica también debe manifestarse en el dominio de la aritmética. Por ejemplo, el desarrollo de los significados vinculados a los algoritmos de cálculo debe permitir entender los efectos producidos por ciertas manipulaciones de los números cuando realizamos los cálculos. La escena 2 anterior describe una de estas situaciones.

En relación con los procedimientos de resolución presentados por los alumnos, D. José cree que algunos de ellos pueden entenderse desde el punto de vista de que las nociones matemáticas y algunos contenidos procedimentales proporcionan a quienes aprenden verdaderas herramientas de resolución matemática. Ver las nociones y procedimientos matemáticos como herramientas que ayudan a resolver problemas matemáticos implica considerar que los diferentes contenidos de las matemáticas escolares están intrínsecamente relacionados y, por tanto, cuando se piensa en el diseño de las tareas a presentar a los alumnos se debería tener presente esta característica de la naturaleza de las matemáticas.

En el dominio de la aritmética, una de las características del desarrollo del sentido numérico está vinculado a la capacidad de realizar juicios razonados sobre la idoneidad de los resultados (Llinares, 2001). Desde este punto de vista, determinados algoritmos deben ser vistos como procedimientos generales que permiten conectar diferentes dominios numéricos. Un ejemplo puede ser el algoritmo de Euclides para la división, y su adaptación curricular en Primaria que es introducida en 4° curso y la propiedad fundamental de la división entera con números naturales, pero que luego debe ser retomada como un argumento justificativo para determinar el tipo de unidades del sistema de numeración decimal que son manejadas en la división con decimales.

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} r & c \end{array}$$

$$a = b \times c + r$$

$$a \times k = (b \times c + r) \times k$$

$$a \times k = b \times k \times c + r \times k$$

(En la escena 2: 7,304 dividido por 23,1 ha sido transformado en 73,04 dividido por 23,1, al multiplicar dividendo y divisor por 10, por lo que el resto de la segunda división es 10r)

La necesidad de que los alumnos lleguen a manejar de manera eficiente los procedimientos y las manipulaciones que se realizan en el desarrollo de los algoritmos se pone de manifiesto en la escena 2 descrita con anterioridad. Junto con el uso flexible y competente de los algoritmos otro aspecto que ayuda a caracterizar el desarrollo de las destrezas procedimentales es la posibilidad de que los estudiantes puedan usar una variedad de estrategias mentales, con lápiz y papel, o usando calculadoras.

El desarrollo de las destrezas procedimentales por consiguiente debe conseguirse en relación con la comprensión conceptual. La comprensión hace que la aplicación de los procedimientos sea más flexible e incluso ayuda a su uso idóneo como instrumentos de resolución de las tareas matemáticas. De manera idéntica, la destreza en el manejo de un determinado nivel de los algoritmos (por ejemplo, la propiedad de la división euclídea con los números naturales) puede ayudar al desarrollo de la comprensión conceptual (por ejemplo, la relación entre dividendo, divisor, cociente y resto en una división con decimales). En la escena 2 anterior es difícil que Pepa y Marta puedan desarrollar una plena comprensión de la división con decimales si no desarrollan cierta destreza procedimental cuando están trabajando la división entera en el dominio de los naturales. Una característica de considerar la relación entre el desarrollo de la comprensión conceptual y el desarrollo de las destrezas procedimentales es que cuando los alumnos no tienen una comprensión conceptual de los algoritmos deben memorizar los pasos y necesitan mucha práctica. Si los alumnos comprenden es más difícil que olviden algún paso o pueden ser más flexibles a la hora de aplicar los algoritmos en situaciones distintas. Pero no hay que olvidar que si un alumno memoriza los pasos de un algoritmo sin comprenderlos pero llega a manejarlo eficazmente (pensar, por ejemplo, en el algoritmo de la resta llevando), luego resulta muy difícil introducirle en la necesidad de comprender por qué funciona.

Cuando las destrezas procedimentales se aprenden de manera aislada, como por ejemplo la tarea 2 en relación al procedimiento de construcción de los triángulos isósceles en el escena 1 o como la regla de mover las comas en la división de números decimales en la escena 2, son más fáciles de olvidar o de confundir y por tanto el aprendizaje de nuevas ideas matemáticas se convierte en una labor más dura. Además, con estos planteamientos se transmite una concepción sobre las matemáticas escolares como si fueran una colección de recetas y procedimientos matemáticos sin relación y que la única forma de aprenderlos es memorizando.

El aprendizaje de procedimientos matemáticos (por ejemplo, procesos de construcción de figuras geométricas o los algoritmos en el dominio de la aritmética), estableciendo una red de relaciones entre las diferentes nociones estudiadas durante toda la etapa, puede ayudar a que los alumnos desarrollen una verdadera capacitación matemática favoreciendo el uso de diferentes nociones matemáticas como instrumentos en la resolución de problemas.

2.3. Comunicar, explicar y argumentar matemáticamente

La habilidad de explicar y justificar los procesos y resultados de las tareas se apoya en la capacidad de establecer relaciones entre las nociones y procesos matemáticos. El desarrollo de esta capacidad se desarrolla a lo largo de toda la etapa y se apoya en la posibilidad de que el profesor proporcione regularmente oportunidades para que los alumnos puedan hablar de los conceptos y procedimientos que han utilizado y proporcionar razones de por qué han hecho lo que han hecho. En la escena 1, los alumnos en la clase de D. José sabían que, por norma, se esperaba de ellos que justificaran y aclararan a sus compañeros lo que habían hecho. Para D. José que los alumnos lleguen a ser capaces de justificar y explicar sus ideas también tenía como objetivo permitir que clarificaran sus razonamientos, lo que mejoraba la comprensión conceptual de los estudiantes.

La capacidad de comunicar, explicar y argumentar matemáticamente significa que los estudiantes deben llegar a ser capaces de proporcionar suficientes razones para que sus compañeros y el profesor puedan llegar a intuir «por qué han hecho lo que han hecho». Es en este sentido en el que el contenido de las interacciones establecidas en los debates de las escenas descritas antes deben permitir que los estudiantes usen conceptos y procedimientos para explicar y justificar, relacionándolos con lo que ya conocen. Por ejemplo, en la escena 1, el hecho de conocer la definición de triángulo isósceles no está relacionada directamente con la idea que se tiene de un eje de simetría. La noción de mediatriz de un segmento es precisamente la que permite establecer la conexión entre la definición de triángulo isósceles y la noción de simetría permitiendo generar un proceso de construcción de la figura. En la escena 2, la relación entre la noción de valor de posición en nuestro sistema de numeración decimal y la propiedad fundamental de la división entera no es del todo explícita en el algoritmo de la división con números decimales. Es esta relación la que se convierte en el contenido de las interacciones de los alumnos en los momentos de argumentar y justificar lo que han hecho o no han podido hacer.

Entendido de esta manera, el desarrollo de las capacidades de comunicar y explicar matemáticamente es un aspecto clave de la capacitación matemática de los alumnos ya que:

– Apoya y ayuda a desarrollar la comprensión conceptual al ser un contexto en el que se establecen relaciones entre conceptos y procesos.

– Desarrolla las destrezas procedimentales por ser un contexto que favorece la clarificación y justificación de los procedimientos empleados.

En este sentido, los estudiantes que desarrollan sus propios procedimientos de resolución de los problemas, más que imitar el procedimiento dado en el libro de texto, deben reflexionar sobre los significados implicados (en el proceso de construir en la escena 1 o en las operaciones con decimales en la escena 2) ya que compartir su trabajo implica más que sólo «mostrar» el procedimiento

seguido, implica explicar y justificar. En este sentido la comunicación es necesaria para construir competencia matemática.

2.4. Pensamiento estratégico: capacidad de formular, representar y resolver problemas

Todas las capacidades anteriores se manifiestan en la habilidad de los estudiantes de plantearse, representarse y resolver problemas. Para formular un problema los alumnos deben ser capaces de identificar aquello que puede ser relevante y de establecer relaciones, por consiguiente un aspecto de esta capacidad se manifiesta cuando los alumnos llegan a ser capaces de identificar estructuras generales en situaciones diferentes. Ejemplos de esto se muestran en las escenas anteriores. Mientras en la escena 1 algunos alumnos podían identificar relaciones generales que les permitían formular el proceso de construcción, relacionando diferentes nociones, en la escena 2 la imposibilidad de identificar una estructura general en el dominio de la aritmética en las dos situaciones de la división entre los números naturales y la división entre números decimales genera dificultades a la hora de interpretar el tipo de unidad que se está manejando en cada paso del algoritmo de la división (significado del sistema de numeración decimal). En este sentido es en el que hay que entender la capacidad de identificar estructuras comunes en representaciones y contextos diferentes.

Otro aspecto importante del pensamiento estratégico está relacionado con la generación de flexibilidad en la resolución de problemas no rutinarios. La tarea 3 presentada por D. José a sus alumnos puede ser considerada una tarea no rutinaria frente al tratamiento dado a las tareas presentadas en la escena 2. La caracterización de problema no rutinario está vinculada a la necesidad del estudiante de inventarse una forma de enfrentarse al problema. Una manera en la que se manifiesta este aspecto de «ser capaz matemáticamente» es cuando los alumnos la usan para elegir entre diferentes aproximaciones a la resolución del problema. Por ejemplo, los alumnos del primer ciclo de Primaria suelen utilizar diferentes procedimientos de contar para resolver problemas de estructura aditiva. Así, ante un problema como:

Pedro tiene 8 canicas. Su mamá le ha dado algunas y ahora tiene 12. ¿Cuántas canicas le ha dado su mamá?

Un alumno puede, usando los dedos para llevar la pista de los números contados, contar desde 9 hasta 12, levantando un dedo cada vez que se pronuncia un número: «nueve, diez, once y doce». Luego mirar cuántos dedos tiene levantados y responder «cuatro». Sin embargo este procedimiento de contar puede resultar infructuoso cuando la diferencia entre ocho y doce sea tanta que le impida usar los dedos. Por ejemplo, ante el siguiente problema:

Pedro tiene 7 canicas y su mamá le da algunas. Ahora tiene 16. ¿Cuántas canicas le ha dado su mamá?

Un alumno con flexibilidad en el uso de los procedimientos de contar, y representándose el problema mentalmente de manera que pueda ver la relación entre el 16 y el 7 de otra manera, puede llegar a utilizar el procedimiento que consiste en ver que el doble de 7 es 14 y dos más son 16. El uso flexible de los procedimientos de contar (contar hacia delante, contar hacia atrás, el uso de dobles, el uso de derivados de los dobles, etc.) en función del problema presentado es también una manifestación del uso flexible de diferentes procesos de resolución de problemas apoyado en la capacidad de representarse mentalmente los datos del problema de manera idónea.

2.5. Desarrollo de actitudes positivas hacia la propia capacidad matemática. Confianza matemática en uno mismo

El desarrollo de actitudes positivas hacia las matemáticas se relaciona con verse a uno mismo capaz de resolver las tareas matemáticas y ser capaz de aprender matemáticas considerando útil y con sentido el contenido matemático. Desarrollar esta disposición positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas y las propias matemáticas requiere que los alumnos puedan tener oportunidades de dotar de sentido al contenido matemático y de tener la oportunidad de aportar al proceso de generar significado matemático. La valoración de las aportaciones de los alumnos debe hacerse desde lo que realmente puede estar aportando al proceso de establecer conexiones o de comunicar. Entendidas de esta forma, el desarrollo de actitudes positivas está vinculado al tipo de oportunidades que el profesor presenta en la clase y al tipo de tareas matemáticas que se les demanda. Difícilmente un alumno podrá desarrollar actitudes positivas hacia su propia capacidad matemática si el único tipo de problemas y tareas que el profesor presenta son algorítmicas. La posibilidad de resolver problemas con diferentes niveles de exigencia matemática junto a la estructura de interacción que un profesor construya en su aula son por tanto elementos importantes en el desarrollo de las actitudes. En estos momentos se está empezando a asumir que la disposición de los estudiantes hacia las matemáticas es un factor importante en la determinación de su éxito educativo.

2.6. Características del desarrollo de la competencia matemática

En la descripción de las dimensiones de lo que significaba llegar a ser matemáticamente competente se han ido desgranando algunas características esenciales. Algunas de estas características son:

– Las diferentes dimensiones a través de las que se define deben desarrollarse al mismo tiempo ya que están entrelazadas.

– Llegar a ser competente matemáticamente es un proceso largo que dura toda la vida escolar.

– La competencia matemática no es un asunto de todo o nada.

De ahí que el maestro deba ser consciente de estas características a la hora de planificar la enseñanza e interpretar las producciones de los alumnos en cada momento.

Desde esta perspectiva, el desarrollo de la competencia en matemáticas está vinculado a la relación entre las diferentes dimensiones que la constituyen y se apoya en el hecho de establecer relaciones entre diferentes nociones y procedimientos matemáticos. Como se ha descrito en la escena 1, la posibilidad de relacionar y conectar cosas que ya se conocen, permitiendo ver las situaciones problemáticas de una manera diferente, constituye el motor del desarrollo de las diferentes dimensiones en las que hemos caracterizado la competencia matemática. En la escena 2, si Pepa y Marta hubieran tenido la posibilidad de establecer relaciones entre el significado del sistema de numeración decimal y la manipulación de los símbolos en el algoritmo de la división con decimales habrían podido desarrollar nueva comprensión en este nuevo contexto y, por tanto, saber por qué funciona el algoritmo y llegar a realizarlo más eficazmente y, posiblemente, desarrollar una actitud más positiva hacia lo que estaban aprendiendo. Así, como sucede en la escena 1, la evidencia de la competencia, manifestada a través de la explicación proporcionada dirigida a poner de manifiesto el porqué del proceso de construcción seguido por el grupo de Pepa, se deriva de las conexiones realizadas entre nociones y procesos ya conocidos.

Una manera de ver cómo y qué conexiones realizan las personas es a través de la *comunicación* y *explicación* de lo realizado. En la escena 1 la comunicación y explicación del proceso de construcción utilizado por el grupo de Ana permitió al grupo de Antonio relacionar la definición del triángulo isósceles con el significado de los radios en las circunferencias. Esta conexión les permitió mejorar su proceso de construcción permitiéndoles generar nueva comprensión. Por otra parte, la exigencia de la comunicación hace que los alumnos tengan que *pensar sobre lo hecho* y puede que tengan que pensar sobre lo realizado desde puntos de vista diferentes como consecuencia de la exigencia de tener que explicar y comunicar a sus compañeros desarrollando aspectos del pensamiento estratégico.

3. Las tareas matemáticas

Los estudiantes aprenden desde lo que hacen en clase. De ahí la importancia de la tarea que el profesor propone y cómo es implementada en el aula, ya que las tareas que se les pide a los alumnos determinarán lo que harán. La importancia de considerar conjuntamente la característica de la tarea y cómo es usada en el aula deriva del hecho de que a veces la naturaleza de las interacciones entre el profesor y los estudiantes hace que se reduzca la demanda de la tarea. Por

tanto, la percepción que los alumnos tengan de las matemáticas escolares se genera desde el tipo de trabajo que ellos hacen.

3.1. El contenido matemático en las tareas: instrumentos de aprendizaje

Las tareas que aparecen en las escenas descritas al principio del capítulo tienen cosas semejantes y cosas diferentes que hacen que se constituyan en oportunidades de aprendizaje distintas para los alumnos. Los dos profesores tenían claramente definidos los objetivos de aprendizaje lo que no determina necesariamente lo que las tareas elegidas pueden llegar a demandar del alumno.

– En la escena 1, D. José tenía definido sus objetivos para esta lección intentando que sus alumnos interpretaran los dibujos en términos geométricos reconociendo visualmente propiedades geométricas, todo esto en el contexto de realizar construcciones geométricas en el dominio de los polígonos (en este caso con la construcción de triángulos isósceles).

– En la escena 2, Dª Inés pretendía que sus alumnos manejaran eficazmente el algoritmo de la división con números decimales como un instrumento necesario para el desarrollo posterior en el dominio de los tantos por cientos y la proporcionalidad.

Mientras que en las dos escenas las tareas planteadas por los profesores pueden ser vistas intentando apoyarse sobre el conocimiento previo de los alumnos, lo que parece exigir a los alumnos es diferente. En los dos casos los profesores han intentado diseñar o elegir las tareas de manera que hubiera un conocimiento previo de los estudiantes que les permitiera enfrentarse a la resolución. En la escena 1 las tareas propuestas por D. José se apoyan en el conocimiento de los alumnos de la definición de triángulo isósceles, el significado de la mediatriz y de la circunferencia y sus elementos y en el manejo de la regla y el compás. En la escena 2, las tareas propuestas se apoyan en el conocimiento por parte de los alumnos del algoritmo de la división con números naturales.

Sin embargo, una diferencia entre las tareas propuestas en las dos escenas radica en lo que se les pide a los alumnos. En la escena 2, las tareas propuestas conllevan el que los alumnos realicen multitud de cálculos y puedan llegar a ser eficaces y rápidos en la resolución de divisiones con decimales. Las tareas están secuenciadas para conseguir este objetivo, y por tanto el alumno lo único que tiene que hacer es memorizar unos pasos y aplicarlos cada vez en situaciones nuevas. Las tareas así planteadas tienen un objetivo claramente definido y los alumnos no tienen la oportunidad de problematizar la situación. Hay un procedimiento (representado por la regla de dividir números decimales) que hay que aplicar a diferentes cuentas. Las tareas proporcionan la posibilidad de practicar dicho procedimiento. En la escena 1, la tarea está diseñada de manera que permite a los alumnos problematizar la situación. No hay predefinido un procedimiento que

hay que aplicar. La tarea permite que los alumnos busquen diferentes procedimientos y para ello está diseñada para que piensen en un proceso de solución más que en aplicar una receta ya dada. La posibilidad de resolución de la tarea se apoya en que los alumnos establezcan relaciones de manera significativa entre nociones que ya conocen para la resolución de la situación planteada.

Además, la tarea planteada y su uso en el aula les exige reflexionar sobre la manera en que han realizado la construcción, sobre cómo pueden relacionar procedimientos alternativos y cómo lo que ya conocen puede ser usado para representar de una manera nueva el problema planteado. Un ejemplo de lo que puede producir este uso de la tarea lo tenemos en la escena 1 con la modificación del proceso de construcción generado por el grupo de Antonio una vez han escuchado cómo el grupo de Ana había realizado la construcción. Y, cómo el grupo de Pepa había relacionado las ideas de simetría, mediatriz de un segmento y la definición de triángulo isósceles para realizar la construcción. En cierta medida, los estudiantes de la clase de D. José están construyendo nuevo conocimiento al establecer vínculos entre lo que ya conocían para resolver la tarea planteada.

Por otra parte, en la identificación de las tareas de construcción que D. José plantea en su planificación considera clave que los estudiantes relacionen la figura construida con el proceso de construcción, debiendo validarse el procedimiento. En este proceso hay que diferenciar dos momentos en la evolución del significado teórico de una construcción:

– Una construcción se concibe como un proceso concreto para realizar un dibujo que se justifica por la aceptabilidad del producto final.

– Una construcción se concibe como un procedimiento teórico, justificado por un teorema (relación entre propiedades).

La relación entre estos dos significados del proceso de construcción se pone de manifiesto con los procedimientos usados por el grupo de Antonio antes y después de intervenir Ana.

Uno de los objetivos de D. José en las tareas de construcción es que los alumnos vinculen los aspectos visuales y teóricos de la geometría para:

– Reconocer visualmente propiedades geométricas.

– Interpretar los dibujos en términos geométricos.

– Realizar las construcciones.

Mientras esta idea influye a la hora de implementar la tarea en el aula ya que exige dedicar un tiempo para que los alumnos expliquen y desarrollen argumentación matemática, en la escena 2 establecer relaciones entre nociones ya conocidas no es un objetivo explícito. Así, la no consideración de la relación existente entre el procedimiento de dividir números decimales, los significados asociados al valor de posición del sistema de numeración decimal y su relación con la propiedad fundamental de la división entera hacen que los alumnos no tengan la oportunidad de relacionar estas diferentes nociones en el dominio de

la aritmética, convirtiendo su actividad matemática derivada de la tarea en una de carácter memorístico.

Estas escenas determinan el significado que se puede asociar al contenido matemático cuando se le ve como instrumento en la resolución de problemas de matemáticas. El contenido matemático visto como instrumento debe ayudar a resolver problemas de varias maneras. La manera en la que los alumnos hacen uso del contenido matemático para resolver los problemas de matemáticas determina la forma en la que están pensando. De ahí que llegar a ser matemáticamente competente está influenciado por el uso del contenido matemático como instrumento. Es decir, los instrumentos que los alumnos usan (por ejemplo, las nociones matemáticas usadas por el grupo de Pepa en la escena 1 para construir triángulos isósceles) determinan la forma en que el problema es visto, de ahí su potencialidad para el aprendizaje.

4. El aula de matemáticas

Dado que estamos asumiendo que el aprendizaje de las matemáticas se desarrolla interactivamente a lo largo del tiempo, las características de las tareas matemáticas no aseguran por sí mismas el desarrollo de la competencia matemática. Como hemos visto, el hecho de que las tareas se construyan considerando el conocimiento previo de los alumnos no asegura que durante su implementación en el aula se mantenga el nivel de exigencia cognitiva. En este sentido es en el que decíamos en la introducción de este capítulo que el aula de matemáticas debe verse como un sistema en el que todos los elementos que intervienen (profesor, alumnos, tareas matemáticas, interacciones entre ellos) ayudan a caracterizarlo como un sistema. La caracterización del aula de matemáticas como un sistema se apoya en el establecimiento de unas determinadas «normas sociomatemáticas» que caracterizan el tipo de interacciones que se dan en este sistema particular.

4.1. Normas sociomatemáticas

La caracterización de las interacciones entre el maestro, los alumnos y el contenido matemático para mantener el nivel de exigencia cognitiva de una tarea, cuando se implementa en el aula, ayuda a determinar una determinada «cultura». La cultura del aula puede ser entendida como el conjunto de significados compartidos y que determinan una manera de comportarse. Algunas características son:

– *Proporcionar un determinado tipo de «soporte» para el desarrollo de la tarea* como ofrecer ideas, plantear problemas similares o pedir ideas de otros. Por ejemplo en la escena 1 cuando D. José ayuda a sus estudiantes a que razonen a través del problema planteado permitiéndoles establecer relaciones entre las estrategias de construcción planteadas, sin indicar en ningún

momento un procedimiento estándar de resolución. Así, al proporcionar a los estudiantes tiempo para explicar y comparar diferentes procedimientos de construcción genera la oportunidad de desarrollar nuevas relaciones conceptuales y poder representarse el problema de manera diferente (pensamiento estratégico). En la escena 2, Dª Inés no proporcionó a sus alumnos la indicación para explicitar la relación que existe entre la manipulación de las comas en la expresión de los números decimales y el significado de las unidades en el sistema de numeración decimal. Explicitar la relación entre la propiedad fundamental de la división entera con los números naturales y el algoritmo de la división con decimales hubiera permitido a Pepa y Marta poder dotar de sentido a los resultados de la división (cociente y resto).

– *Proporcionar tiempo a sus alumnos para mejorar sus propios procedimientos* al permitirles escuchar e interpretar las respuestas de sus compañeros. La posibilidad de utilizar un tiempo para la discusión de múltiples estrategias de resolución proporciona la oportunidad de que los alumnos puedan mejorar sus propuestas. Un ejemplo de ello es la mejora del procedimiento de construcción puesto de manifiesto por el grupo de Antonio en la escena 1. Antonio usó una idea expresada en la explicación del proceso de construcción realizado por el grupo de Ana, lo que le permitió relacionar la idea de que los radios en una circunferencia miden todos lo mismo con la definición de triángulo isósceles.

– *Mantener la exigencia de que los alumnos proporcionen explicaciones, argumenten, justifiquen y expliquen de manera adecuada los procedimientos seguidos.* Con esta exigencia en mente el maestro puede centrar el contenido de las interacciones entre los alumnos y él mismo en el contenido matemático relevante y no simplemente en la descripción superficial de pasos en un procedimiento. Es decir, las tareas y el contexto de aprendizaje que se genera con su implementación en el aula deben crear la oportunidad para que los alumnos reflexionen sobre ideas matemáticas importantes. Las escenas del principio del capítulo describen dos contextos en los que se genera la posibilidad de reflexionar sobre ideas matemáticas importantes. En un caso con éxito y en el otro de manera infructuosa.

Así, desde estas características anteriores podemos identificar algunas normas sociomatemáticas que ayudan a que los alumnos puedan llegar a ser matemáticamente competentes:

– El convencimiento de que las ideas expuestas y los métodos usados deben ser valorados por la clase entera.

– Los alumnos eligen y comparten diferentes métodos de resolución.

– Los errores son aspectos del proceso desde los que aprender.

– La argumentación y explicación matemática es la que fundamenta la corrección del error.

Por una parte, si la comunicación y la explicación ayuda a que se fomenten las conexiones y relaciones entre nociones y procedimientos matemáticos, en-

tonces las aulas de matemáticas que potencien que los alumnos se comuniquen ayudarán a generar competencia matemática como la hemos descrito. Desde algunas perspectivas teóricas, estas características de las aulas ayudan a constituir una determinada cultura en el aula de matemáticas en la que los alumnos trabajan de manera interactiva los problemas y explican y reflexionan sobre las respuestas producidas y los métodos generados.

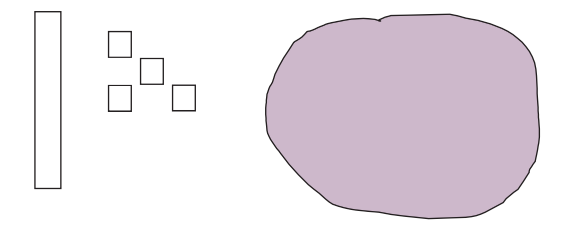
ACTIVIDADES: El caso de Miguel

Procede del vídeo: *Elementos del conocimiento base para la enseñanza de las matemáticas. Conocimiento sobre el aprendizaje y los aprendices. Vídeo 3: La comprensión del significado del número. Contexto cardinal*; LLinares y Sánchez. 1993. Servicio de medios audiovisuales. Universidad de Sevilla, España.

Informe de una profesora de Educación Primaria. Este año tengo un curso de 2° de Primaria. Al principio del mes de octubre, cuando los niños ya se habían tranquilizado un poco del período de vacaciones de verano, retomé en la clase de matemáticas cosas relativas al sistema de numeración decimal. Pero pensé que sería bueno ver lo que mis alumnos podían recordar de la idea de decena y de los números de dos cifras que estudiamos el año pasado.

En 1° curso había estado trabajando con ellos algunas nociones sobre los números de dos cifras y habían conseguido, al final del curso, escribir sucesiones de números de dos cifras, escribir este tipo de números en notación ampliada y hacían cuentas de sumar «sin llevarse» bastante bien. Para ello había seguido la secuencia propuesta en el libro de texto. Ahora, este año, para obtener información sobre lo que recordaban, diseñé una serie de tareas que normalmente no solía hacer en clase. Las tareas consistían en presentar situaciones de suma y resta pero no a nivel simbólico sino utilizando referentes distintos para los números. Las tareas las presenté utilizando un retroproyector. Los niños estaban sentados en grupos de 3 con el material bloques multibase en base 10 delante para poder manipular. Una de las primeras tareas que presente consistía en presentar sobre el retroproyector una cantidad con los bloques multibase y otra tapada con una cartulina. Yo les decía oralmente cuál era la cantidad total que había sobre el retroproyector y les pedía que me dijeran cuánto estaba tapado por la cartulina **(Tipo de tarea: concreto ± = oral)**.

Así, en una tarea (14 ± = 56) presenté la siguiente situación:



y dije *«En total hay 5 decenas y 6 unidades. ¿Cuánto hay tapado con la cartulina?»*.

En la clase había bloques multibase que los alumnos podían coger cuando quisieran para responder a las tareas planteadas. Los niños empezaron a trabajar y empecé a caminar entre ellos para ver lo que hacían. Me acerqué a la mesa en la que estaba Miguel y me pareció que estaba un poco confuso. Así que le pregunté:

Profesor: *«¿cuántas hay destapadas?»*

Miguel: *Una decena y cuatro unidades (señalando las decenas y unidades destapadas)*

Profesor: *¿Cuántas hay tapadas, pues?*

Miguel: ... (Pensando) *6 unidades...?* (haciendo referencia al total)

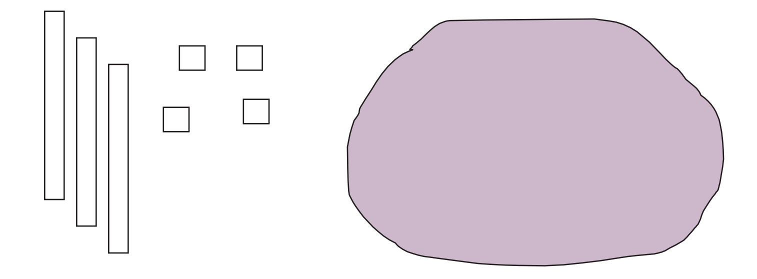
Profesor: (Repitiendo) *5 decenas y 6 unidades...*

Miguel: *4 decenas y 2 unidades!*

Después de hacer algunos ejercicios más de este mismo tipo cambie el formato y pensé que sería bueno que los alumnos tuvieran delante el total representado con los bloques multibase, en vez de dárselo sólo verbalmente. **(Tipo de tarea: concreto = concreto ±)**. Entonces, en la siguiente tarea (72 = 34 + _ ; que también podía entenderse como 72 – 34 = _) se produjo la siguiente conversación con Miguel. Sobre la mesa Miguel tenía 6 decenas y 12 unidades.

Miguel: *Hay 72* (contando 6 decenas y 12 unidades y colocando 10 unidades en forma de «barrita»).

Profesor: *Bien, ahí tienes 72. Ahora cierra los ojos.* (En ese momento separé 3 decenas y 4 unidades y tapé el resto con una cartulina).



M: (Abriendo los ojos) *Cinco barras... ¿...taquitos cuántos había?*

P: *Tenías 72 en total. Tú dijiste que tenías 72 en total.*

M: ...(Mirando las 3 decenas y 4 unidades que tiene encima de la mesa). *¡¡Es que me has dado más!!*

P: *Ah! ¿Te he dado más?*

M: *Es que aquí hay 4 y antes había 2 (señalando las unidades).*

P: *¿Quieres que las contemos otra vez?*

M: (Asiente con la cabeza) *Ah, ya sé! Había más taquitos pero los puse todos juntos y...*

P: (Destapando todas las piezas) *Cuéntalo todo. ...Ah! Ya se lo que pasó. Que había más taquitos y los pusiste como una barra.*

M: (Contando otra vez las decenas y las unidades)... *12 taquitos.*

P: *12 taquitos y... ¿cuántos barras?*

M: (Contando de una en una). *6!*

En este momento vuelvo a repetir el planteamiento del ejercicio. Le pido que cierre los ojos y tapo unas cuantas decenas y unidades, dejando destapadas 3 decenas y 4 unidades.

M: (Después de abrir los ojos) *¿había 12 taquitos, no?*

P: *Sí, 12 taquitos.*

M: (Contando desde 4 hacia adelante, levantando un dedo cada vez que dice un número. Cuando llega al 12 tiene 8 dedos levantados). *¡¡¡8 taquitos!!!*

Miguel repite el mismo procedimiento para las decenas. Cuenta desde 3 hacia adelante, levantando un dedo cada vez, cuando llega al número 6, mira los dedos que tiene levantados y dice: *«...y 3 barras»*.

Después de estar con Miguel estuve caminando entre las mesas, mirando, preguntando cuestiones, escuchando y sugiriendo nuevas cuestiones. Después de unos veinte minutos nos reunimos todos juntos. Yo pedí a algunos de mis alumnos que explicaran lo que habían hecho y por qué. Luego les pedí que compararn soluciones diferentes. Por ejemplo, ¿cómo es la solución de Miguel diferente de la de Ana? Después de dos días de estar haciendo los problemas de restar cambiando los modos de representación utilizados he podido trabajar de manera individual con toda la clase de la misma forma en que lo hice con Miguel.

Cuestiones

** En relación al tipo de tareas usadas*

– ¿Son útiles este tipo de tareas?

– ¿Qué tipo de información realmente he obtenido?

– ¿Debería haberlas utilizado normalmente en clase? ¿Por qué? ¿Cuándo?

– ¿En qué medida ha podido influir el diferente formato de representación de las tareas en la forma de resolverlo de Miguel?

Decir oralmente la cantidad total, como ocurre en la primera tarea, o representar el total de forma concreta para iniciar la tarea, ¿influye para algo?

¿Hubiera sido más interesante presentar la segunda tarea como 7 decenas y 2 unidades, en vez de 6 decenas y 12 unidades?

– Y la relación entre los números utilizados, ¿ha podido influir en las dudas de Miguel en la segunda tarea?

** En relación a la forma en que he presentado la tarea (gestión del contenido matemático durante la interacción)*

– ¿Tendría que haber dicho 56 en vez de 5 decenas y 6 unidades en la primera tarea?

– ¿En qué medida ha podido influir esta forma de decir a los niños el número?

– ¿He dirigido demasiado la realización de la tarea?

– ¿Mi intervención en la primera tarea ha podido influir en la respuesta dada por Miguel?

– ¿Debería haberme callado y esperar?

– En la segunda tarea, ¿tendría que haberme esperado a ver lo que decía Miguel al darse cuenta de lo que le pasaba con las unidades, en vez de volver a insistir en la presentación de la tarea desde el principio?

** En relación al contenido*

– ¿En qué medida ha sido importante para Miguel darse cuenta de que 6 decenas y 12 unidades es lo mismo que 72?

BIBLIOGRAFÍA

GÓMEZ-CHACÓN, I. (2002): «Cuestiones afectivas en la enseñanza de las Matemáticas: Una perspectiva para el profesor», (pp. 19-59). L.C. CONTRERAS & L. BLANCO (Eds.) *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el Área de Matemáticas. Una mirada a la práctica docente*. Servicio de Publicaciones: Universidad de Extremadura.

LLINARES, S. (2001): «El sentido numérico y la representación de los números naturales», (pp. 151-176). En E. CASTRO (Ed.) *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Síntesis: Madrid.

CAPÍTULO 2

Aprendizaje y matemáticas

ÍNDICE

María Luisa Ruiz Higueras

1. Introducción

Cada vez que los profesores y profesoras nos planteamos enseñar determinados contenidos matemáticos escolares a los alumnos y alumnas de nuestra clase, ponemos en funcionamiento, casi sin pretenderlo, es decir, de modo implícito, una serie compleja de ideas sobre qué significa aprender matemáticas y cómo se puede ayudar a los alumnos en este proceso. Dichas ideas, que hemos ido forjando a lo largo de nuestra actividad educativa gracias a la experiencia y a la reflexión, constituyen nuestra concepción del aprendizaje y de la enseñanza. Ésta, nuestra propia «teoría», actúa, en la mayoría de las ocasiones, como único referente clave para la toma de decisiones sobre qué, cuándo y cómo enseñar y evaluar. Es decir, esperamos que nuestro proceso de enseñanza genere un aprendizaje en el alumno y diseñamos estrategias didácticas de acuerdo con nuestra propia «teoría implícita» de cómo se aprenden las matemáticas.

Así, por ejemplo, un profesor puede creer que si lleva a cabo explicaciones de modo detallado y exhaustivo en la pizarra, sus alumnos, al escucharlo atentamente, interiorizarán su explicación y asimilarán los contenidos matemáticos de su discurso: existe un saber objetivo que posee el maestro y aprender es apropiarse de él para poder reproducirlo con fidelidad. Ésta es la forma tradicional de enseñar, basada en la transmisión de saberes ya establecidos como forma de perpetuar la cultura matemática. Otro profesor propondrá problemas directamente a los alumnos, esperará sus reacciones y observará sus estrategias de resolución, interviniendo muy pocas veces, de modo puntual y esporádico, no dando las soluciones a los problemas propuestos, sino indicando solamente sugerencias, y haciendo trabajar por cuenta propia a los alumnos. Estos modelos no son mutuamente excluyentes, aunque poseen características diferenciadas, de hecho coexisten y se complementan en la mayoría de los contextos escolares.

No obstante, como afirma Margolinas[1] (1994, p. 100), «para una amplia mayoría de personas, existe frecuentemente una confusión entre aprendizaje y enseñanza, el paso entre lo que el profesor dice y lo que comprende el alumno está considerado como despreciable».

Antes de seguir adelante conviene que estudiemos detenidamente el ejemplo **1**, donde se presentan dos secuencias de enseñanza diferentes para un mismo conocimiento matemático. Su análisis persigue un objetivo inmediato: observar dos concepciones muy distintas de lo que significa, para una profesora, que los alumnos «aprendan matemáticas» en la escuela. Podremos observar cómo, en la primera situación, la profesora interviene como poseedora del saber matemático, los alumnos aplican las consignas que ella les da. Por el contrario, en la segunda, la maestra deja bajo la responsabilidad de los alumnos la búsqueda del conocimiento matemático puesto en juego: descomponer una colección en

[1] MARGOLINAS, C. (1993): *De l'importance du vrai et de faux dans la classe de mathématiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

varias subcolecciones (cuya unión sea equipotente a la colección inicial). Este «saber» no es mencionado en ningún momento por la profesora. El alumno tiene bajo su propia responsabilidad los conocimientos que moviliza.

Objetivos

– Estudiar y analizar el proceso de aprendizaje matemático de los alumnos en situación escolar.

– Analizar la especificidad y significación del «saber» matemático en el proceso de aprendizaje.

– Estudiar modelos teóricos de aprendizaje con objeto de utilizarlos como un conjunto de principios que explican el fenómeno del aprendizaje matemático.

– Determinar y gestionar las variables didácticas en una situación de enseñanza–aprendizaje, con objeto de provocar desequilibrios y nuevos aprendizajes en los alumnos.

– Analizar los errores de los alumnos, investigar las causas, determinar los posibles obstáculos y reconocer su origen: epistemológico, didáctico, ontogenético.

– Estudiar el modelo de *concepción del alumno* con objeto de explicar los comportamientos de los alumnos ante las tareas matemáticas que han de realizar.

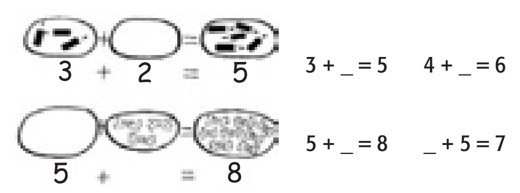
– Estudiar los elementos más significativos de la teoría de los *campos conceptuales* con objeto de analizar las complejas competencias que los alumnos deben desarrollar en el aprendizaje matemático y la estructura de los problemas escolares.

– Llevar a cabo análisis didácticos a partir de ejemplos y actividades escolares para comprender y apreciar la pertinencia de los contenidos teóricos de este capítulo.

El objetivo que nos proponemos en este tema es estudiar el aprendizaje matemático de los alumnos en situación escolar, para ello nos aproximaremos a modelos teóricos que nos facilitarán su comprensión, a la vez que nos suministrarán herramientas de análisis didáctico esenciales para identificar y explicar fenómenos relativos a la enseñanza y al aprendizaje. Nos ayudaremos con ejemplos y actividades para comprender con sentido la modelización teórica introducida.

1ª Secuencia de enseñanza: Descomposición de los primeros números.

1ª fase: La maestra facilita a los niños unas fichas impresas sobre las que van a llevar a cabo su tarea:



Indica a los niños que cuenten los objetos que aparecen dibujados en la primera ficha y les ayuda precisando: «Tenemos tres lápices más dos lápices, que es igual a cinco lápices ¿lo veis? Contad: uno, dos y tres; cuatro y cinco. Uno, dos y tres; uno y dos. Ahora esto que hemos hecho lo vamos a escribir así: 3 + 2 = 5. Rellenad los huecos que quedan, así ...»

2ª fase:

Se trata de poner en práctica lo que se ha introducido anteriormente, para ello, los niños han de completar los huecos que quedan en las igualdades propuestas en diferentes fichas análogas a la anterior.

Conocimientos y estrategias que ponen en funcionamiento los niños:

- Conteo de las colecciones de objetos dibujados en la ficha.
- Cardinación de colecciones.
- Escritura de los numerales en los «huecos» que aparecen en la ficha.

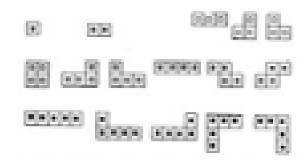
5 + 4 = 9	3 + 5 = 8
_ + 4 = 9	3 + _ = 8

- Copiado «caligráfico» de las igualdades expresadas en la ficha.

2ª Secuencia de enseñanza: Descomposición de los primeros números.

1ª fase: «Tantos como»

La maestra pone a disposición de los niños un dado y una colección de numerosas piezas análogas a las que siguen:



Pide a los niños que, por turnos, tiren el dado y tomen una pieza de la colección que tenga «tantos cuadraditos como puntos indica el dado».

2ª fase: «Construcción de la gran ciudad»

«Con todas las piezas que tenemos vamos a construir los edificios de una gran ciudad». En primer lugar, la maestra invita a los niños a colocar diferentes piezas sobre el panel para que comprueben cómo se van «construyendo» los edificios.

Conocimientos y estrategias que ponen en funcionamiento los niños:

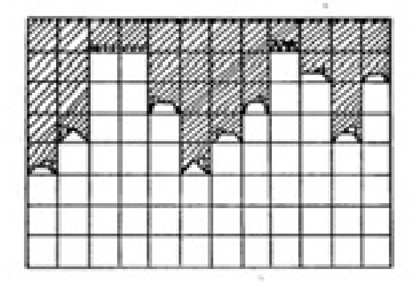
- Coordinación de dos colecciones.
- Conservación de la cantidad de elementos de una colección, independientemente de su disposición espacial.
- Conteo de elementos de una colección.
- Cardinación de colecciones.
- Cuando llevan varias jugadas, los niños comienzan a tener dificultades para encajar las piezas de mayor tamaño (4 o 5 cuadraditos). En este momento se produce un desequilibrio en el procedimiento «de base» empleado y surgen preguntas entre ellos: «¿Podemos cambiarlas por otras piezas?». La maestra les indica que pueden cambiar una pieza por varias, siempre que las que tomen tengan «tantos cuadraditos como la inicial», o bien «tantos cuadraditos como puntos obtenidos en el dado».

Divide la clase en grupos de 4 alumnos, anota sus nombres en una tabla:

María Pedro Marta Ana

Ahora vamos a llevar a cabo un juego:

«Vais a tirar el dado y, según los puntos que indique, tomaréis una pieza que tenga tantos cuadraditos como el dado y la colocaréis sobre un edificio de la ciudad. Cada vez que consigáis colocar correctamente una pieza, obtendréis un punto, que anotaremos en la tabla. Quien obtenga más puntos, cuando la ciudad esté totalmente construida, habrá ganado.»

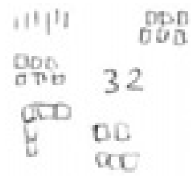


3ª fase: Elaboración de mensajes escritos

La profesora hará de vendedora de las piezas y, una vez tirado el dado, según los puntos obtenidos, para poder «comprar» la pieza correspondiente, los niños deben necesariamente escribir un mensaje en el que indiquen su cardinal.

– Los niños proceden generalmente del siguiente modo: si obtienen 5 puntos en el dado, eligen una pieza de 5 cuadraditos, si no la pueden encajar en un edificio de la ciudad, sobre ella van colocando otras piezas de dimensión 2, 2 y 1; o bien, 2 y 3, etc. Si al encajarlas, vuelven a tener dificultades las van cambiando hasta llegar a descomposiciones del tipo: 1, 1, 1, 1, y 1.

Los mensajes escritos por los niños son del tipo:



Los niños construyen mensajes perfectamente adaptados a la situación, aunque sin referencia a la escritura convencional, y mensajes próximos a la escritura convencional (con ausencia de los signos + e =, que deberán ser, posteriormente, institucionalizados por la profesora).

Ejemplo 1. Análisis de dos secuencias de enseñanza.

2. La especificidad y la significación del saber matemático en el aprendizaje

En este capítulo nos interesaremos de modo especial por el alumno[2] como sujeto cognitivo que ha de aprender significativamente el saber matemático en una institución determinada de enseñanza: la escuela.

Esto nos conducirá a tratar de dar respuesta a cuestiones tales como:

- ¿Bajo qué modelos de aprendizaje se sustenta la enseñanza de la matemática escolar?

[2] A lo largo del tema, emplearemos también la reducción del término alumno al término *sujeto* como proyección de la persona en su dimensión cognitiva.

- ¿Cuáles son las características de estos modelos?
- ¿Qué modelo de aprendizaje permite a los alumnos construir con sentido los conocimientos matemáticos?

Dado que nos ubicamos explícitamente en la institución escolar, debemos señalar dos importantes restricciones que la distinguen de entrada de otros contextos designados como de aprendizaje natural (tales como la familia o la sociedad):

- Una restricción *temporal*: el aprendizaje debe llevarse a cabo en un tiempo determinado fijado por la institución.
- Una restricción *epistemológica*: el conocimiento adquirido por medio del aprendizaje escolar debe ajustarse a un saber de referencia: el saber matemático (Balacheff, 1996, p. 215)[3].

Teniendo en cuenta la restricción epistemológica, en didáctica de las matemáticas se plantea la imposibilidad de estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los saberes matemáticos sin disponer de un modelo que dé cuenta de cómo funcionan éstos, de las relaciones entre ellos, y sobre todo de las relaciones entre el contenido que se va a enseñar y la actividad del alumno.

No podemos considerar que el proceso de aprendizaje en matemáticas sea supuesto análogo al que se podría llevar a cabo en otras disciplinas (lengua, ciencias naturales, ciencias sociales, etc.), sino que depende del propio saber puesto en juego: la matemática. *La matemática es la esencia de todos los fenómenos didácticos.*

Por todo ello y, antes de tratar de dar respuesta a las preguntas anteriores, existen cuestiones fundamentales que debemos abordar previamente, ya que son básicas para la concepción de la enseñanza de la matemática y, en consecuencia, para aprendizaje matemático de los alumnos:

– ¿En qué consiste el conocimiento matemático?

– ¿Qué es «saber matemáticas»?

Para darles contestación elegimos el modelo general del conocimiento matemático propuesto por Brousseau (1998)[4]. Según este investigador: «Saber matemáticas» no es solamente saber definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlos y aplicarlos, es «ocuparse de problemas» que, en un sentido amplio, incluye tanto encontrar buenas preguntas como encontrar soluciones. Una buena reproducción, por parte del alumno, de la actividad matemática exige que éste intervenga en dicha actividad, lo cual significa que formule enunciados y pruebe proposiciones, que construya modelos, lenguajes, conceptos y teorías, que los ponga a prueba e intercambie con otros, que reconozca los que están conforme a la cultura matemática y que tome los que le son útiles para continuar su actividad.

---

[3] Balacheff, N. (1996): Conception, proprieté su système sujet/milieu. En Noirfalise, R. (Ed.) *Actes de l'Ecole d'ETE*. París: DIDIREM- París VII.

[4] Brousseau, G. (1998): *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Actividad 1: A partir de las dos secuencias de enseñanza presentadas en la introducción de este capítulo (Ejemplo 1) determine, dando razones justificativas, cuál de ellas se adapta mejor al modelo de «actividad matemática» descrito por Brousseau (1998).

Una vez que hemos esbozado muy brevemente en qué consiste la actividad matemática, podemos abordar los modelos de aprendizaje, con objeto de determinar el que mejor se adapta al aprendizaje de un saber específico: las matemáticas.

3. El aprendizaje de las matemáticas. Modelos

La gran mayoría de los trabajos de investigación que se llevan a cabo en el área de didáctica de las matemáticas versan sobre el aprendizaje matemático de los alumnos, esto muestra su enorme relevancia para este dominio de conocimiento científico.

Los modelos teóricos que presentaremos no tienen más objeto que servirnos como un conjunto de principios que explican el fenómeno del aprendizaje matemático, nos ofrecerán marcos de referencia para interpretar los comportamientos de los alumnos, así como las intervenciones y decisiones del profesor, permitiéndonos dar respuesta a la pregunta básica: ¿Cómo ocurre el aprendizaje matemático?

Para facilitar el estudio de los aspectos relacionados con el aprendizaje de los alumnos, se establece una relación de complementariedad entre la didáctica de las matemáticas y el dominio de la psicología, ya que «la aproximación psicológica es un instrumento indispensable para esclarecer el modelo del funcionamiento cognitivo del sujeto en relación con el saber y para poner así en entredicho las tesis empiristas que sustentan las prácticas de los enseñantes» (Ricco[5], 1995, p. 159).

Con el riesgo de simplificar los modelos teóricos de las diversas concepciones que existen sobre el aprendizaje matemático de los alumnos, nos centraremos en las dos modelizaciones más relevantes: *empirismo* y *constructivismo*.

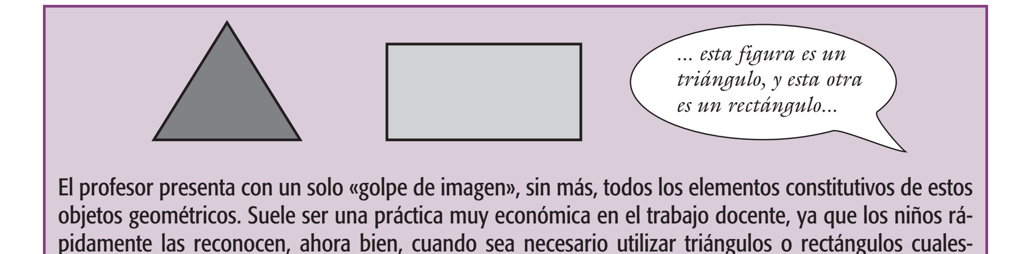
3.1. Empirismo

Esta concepción de aprendizaje toma su fundamento en una concepción espontánea que está presente en la mayoría del profesorado: «el alumno aprende lo que el profesor explica en clase y no aprende nada de aquello que no explica». Es una concepción que apenas se hace explícita, pero que está muy extendida entre los profesores de matemáticas y, en general, en toda la comunidad

[5] RICCO, G. (1995): Psychologie cognitive et didactique des mathématiques. En NOIRFALISE, R.(Ed.) *Actes VIII Ecole d'ETE.* (pp. 159-174) DIDIREM. París VII.

educativa. Piaget la denominó *«empirista»*[6], basándose en la concepción filosófica del mismo nombre que sostiene que la experiencia es la única forma de conocimiento.

Bajo esta concepción, el discurso del maestro se *registra* en el alumno, a quien no se considera capaz de crear conocimientos. Su aprendizaje es considerado como un «transvase» de los saberes que le proporciona el maestro, se limita a recibir bien los contenidos. Así, el saber matemático, enunciado y explicado por el profesor, se *imprime* de un modo directo e inmediato en el alumno y, si existiese alguna intervención distinta de la palabra del profesor, los objetos matemáticos los «verá» o los «tocará». Como consecuencia, bajo este modelo, existe un gran abuso de las presentaciones ostensivas en la enseñanza. «La ostensión es el procedimiento privilegiado para la introducción precoz de las nociones matemáticas» (Brousseau, 1994, p. 112)[7]. Así, por ejemplo, en la Escuela Primaria, las figuras geométricas tales como el triángulo, el círculo, el cuadrado, el rectángulo, etc. se suelen presentar a los alumnos de forma ostensiva.

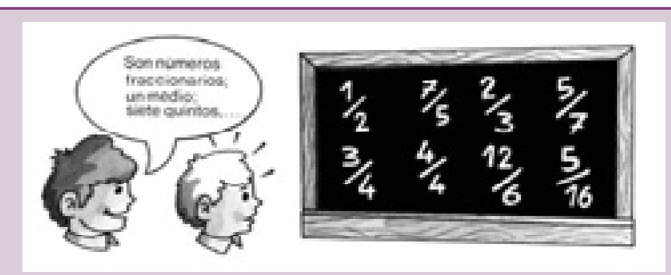


El profesor presenta con un solo «golpe de imagen», sin más, todos los elementos constitutivos de estos objetos geométricos. Suele ser una práctica muy económica en el trabajo docente, ya que los niños rápidamente las reconocen, ahora bien, cuando sea necesario utilizar triángulos o rectángulos cualesquiera, la ostensión fracasará, tan sólo se habrá alcanzado un éxito ilusorio, ya que este modo de presentación impide la generalización y la abstracción.

En el ideal empirista, profesor y alumno no deben equivocarse: el error está relacionado con el fracaso, le impide llegar al éxito en su tarea. Por ello, los errores pueden crear malos hábitos en los alumnos, pueden ocupar el lugar de la buena respuesta. Las causas del error las suelen plantear los maestros en términos de lagunas, faltas, nociones parcialmente asimiladas. Conviene, pues, que el alumno tenga las menores ocasiones de encontrarse con el error. «Se intenta hacer una especie de barrera al error. Aceptar los errores para canalizarlos

[6] «Llamamos empirismo epistemológico a la doctrina según la cual todo conocimiento proviene de la experiencia externa o interna, experiencia concebida como una lectura o un registro de propiedades totalmente organizadas, bien sea en los objetos, bien en el sujeto.» (PIAGET, 1967, p. 37). Las dos corrientes filosóficas: empirismo y racionalismo y las teorías del aprendizaje (conductismo y cognitivismo) no coinciden exactamente; de cualquier forma, las teorías conductuales suelen ser en general empiristas, mientras que las teorías cognoscitivas incorporan posturas más racionalistas.

[7] BROUSSEAU, G. (1994): La mémoire du système éducatif et la mémoire de l'enseignant. En *Documents pour la formation des professeurs d'école en Didactique des Mathématiques,* Tome III, (p. 101-115). COPILEREM. París VII.



Actividad 2: Observe la presentación ostensiva que en este texto se hace de los números fraccionarios. Utilizando manuales escolares de Primaria, determine si se presentan de forma ostensiva determinados objetos matemáticos (la noción de igualdad, de ecuación, de fracción, de polígono...).

Describa algunas características de estas presentaciones.

Actividad 3: A pesar de que el modelo empirista supone que «el alumno aprende lo que el profesor explica en clase y no aprende nada de aquello que no explica», los alumnos realizan múltiples aprendizajes *invisibles,* que en muchas ocasiones les provocan errores persistentes, tales como:

- «si 8 · x = 0, entonces x = -8»
- (-4) (-6) = -10
- «si divido un número **a** entre otro **b**, el cociente siempre será menor que **a**»
- «el cuadrado de un número es siempre mayor que este número»

¿Podría dar algunas causas de estos errores?

y posteriormente evacuarlos pondría en duda, de forma profunda, el sistema de enseñanza» (Margolinas, 1993, p. 179)[8].

Bajo esta hipótesis, la enseñanza ideal consistirá en un «curso» donde el maestro no cometa ningún error, seguido de una prueba donde el alumno tenga la ocasión de responder correctamente, ratificando, de este modo, que ha comprendido perfectamente.

Sin embargo, si aceptamos que para «hacer matemáticas», el alumno debe resolver problemas, debemos considerar normal que conviva con la incertidumbre: el desconcierto, la duda y los tanteos están en el corazón mismo del aprendizaje de las matemáticas. Los alumnos deben superar muchas dificultades, pero sobre todo muchos errores. El profesorado tiene que entenderlos como algo necesario, porque sólo detectándolos y siendo consciente de su origen pondrá medios para superarlos.

> **«Quien practica la ciencia sabe bien que su fuerza no proviene de ninguna infalibilidad intrínseca, sino bien al contrario de su capacidad de autocorrección incesante» (Levy, cit. Margolinas, 1993, p. 170)[9].**

[8] Margolinas, C. (1993) Ibidem.

[9] Margolinas, C. (1993) Ibidem.

3.2. Aprendizaje constructivista

Todos sabemos que muchos conocimientos pueden transmitirse de una generación a otra sin mucho esfuerzo, sin apenas ser conscientes de su adquisición, como si nos impregnáramos de ellos, por simple imitación, mientras que para otros hemos necesitado una verdadera construcción y una determinada y decidida intención de aprender. Considerar que el aprendizaje de ciertos conocimientos supone una actividad propia del sujeto es aproximarse a la corriente constructivista.

En los últimos años hemos estado inmersos en el desarrollo y aplicación de la teoría constructivista. En todo su desarrollo existe una idea fundamental que la preside: *aprender matemáticas significa construir matemáticas.* Las hipótesis fundamentales sobre las que se apoya esta teoría, extraídas de la psicología genética y de la psicología social, las podemos resumir como sigue:

• **1ª Hipótesis:** *El aprendizaje se apoya en la acción.* Idea fundamental en la obra de Piaget: *es de la acción de la que procede el pensamiento en su mecanismo esencial, constituido por el sistema de operaciones lógicas y matemáticas* (Piaget, 1973, p. 26)[10].

Conviene señalar que el término «acción» se utiliza con mucha frecuencia en dominios pedagógicos y didácticos, asignándole el significado de «llevar a cabo manipulaciones» sobre determinados materiales. Sin embargo, el término «acción» en matemáticas va más allá, se trata de **anticipar** la acción concreta, es decir de construir una solución que nos puede dispensar incluso de la manipulación de los objetos reales, bien sea porque los objetos no están disponibles, bien porque son demasiado numerosos y sería costosísima su manipulación. Las «acciones» a las que nos referimos en esta primera hipótesis, si bien pueden tener su origen en manipulaciones reales previas, que podría evocar mentalmente o incluso verbalmente el sujeto, no tienen necesidad de identificarse siempre con manipulaciones reales efectivas. En cualquier caso, la solución matemática (la acción matemática) se opone a la solución práctica (la acción sobre lo real): la acción sobre los objetos reales conduce frecuentemente a llevar a cabo una constatación, mientras que la acción matemática, incluso si no utiliza un procedimiento experto, se sitúa al nivel de una **anticipación**.

En el ejemplo **2** figuran dos secuencias[11] de enseñanza, proponemos leerlas detenidamente, porque sobre ellas analizaremos el sentido que adquiere la noción de *anticipación* en el aprendizaje de las matemáticas.

---

[10] Piaget, J. (1973): *Introduction à l'épistemologie genetique.* PUF: París.

[11] Situación propuesta en Briand, J. y Chevalier, M. C. (1995): *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques.* París: Hatier, (p. 66). Original de H. Péault. IUFM d'Angers.

1ª Secuencia de enseñanza

1ª fase: Los alumnos se organizan en grupos de 4. Reciben un juego formado por 32 cartas numeradas de 0 a 31.

Consigna: Distribuid las cartas sin mezclarlas, una a una, siempre en el mismo orden. Anotad en una tabla los números que cada miembro del grupo obtenga.

Material: Una hoja que contiene una tabla en la que pueden poner los nombres de cada uno del equipo:

María	Carlos	Antonio	Lola
0	1	2	3
4	5	6	7
...			

El maestro muestra cómo debe rellenar cada grupo sus tablas, va revisando y corrigiendo los errores eventuales que los alumnos pueden cometer en esta tarea.

2ª fase: Interiorización de las propiedades de la tabla. El profesor indica a los alumnos: «Cada número de la tabla debes dividirlo por 4 y anotar el *cociente* obtenido en rojo y el *resto* en verde, ¿qué relaciones observas?»

Se hace una puesta en común entre todos los grupos y el profesor va remarcando las propiedades de la tabla.

3ª fase: Ejercicios de aplicación.

¿En qué línea y en qué columna deberíamos situar el número 123 si continuásemos la tabla?

¿Qué número escribiríamos en la fila 67 y en la 3ª columna?

2ª Secuencia de enseñanza

1ª fase: El profesor comienza a escribir en la pizarra los primeros números del siguiente modo:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	...	

¿quién quiere continuar?

Varios alumnos colaboran voluntarios en la construcción de la tabla hasta que el profesor decide que se paren, por ejemplo en el 22, y formula algunas cuestiones del tipo:

¿En qué fila está el número 10?, ¿en qué columna está el número 17?...

2ª fase: Resolución de problemas del tipo ¿dónde estará el número?

El profesor anuncia que se va a seguir construyendo la tabla, pero antes quiere hacer algunas previsiones del tipo: «¿En qué fila y en qué columna estará el número 35?, ¿y el 40?, ¿y el 47?...»

Los alumnos deben, cada uno individualmente, aportar soluciones. Se pasa luego a un inventario colectivo de las soluciones y a una discusión y validación de los resultados y de las estrategias de búsqueda de la solución.

El profesor sigue proponiendo diversos problemas de este tipo, hasta que la discusión entre las diversas estrategias hace que emerja la más económica («dividir por 4 y observar el resto»).

Se propone ahora encontrar el lugar de números tales como: 473, 517...

El profesor anima a los alumnos a que validen y prueben los resultados obtenidos.

3ª fase: Ejercicios de aplicación.

Fase idéntica a la situación anterior.

Ejemplo 2. La acción de los alumnos como anticipación.

En la primera situación el profesor interviene muy rápidamente pidiendo a sus alumnos que efectúen la división por 4 y que constaten cuál es el *cociente* y el *resto*. Por el contrario, en la segunda secuencia, el profesor no habla nunca de división, son los alumnos, a través del problema propuesto, quienes tienen necesidad de desarrollar estrategias, desde la más costosa: escribir sucesivamente los números uno tras otro en la tabla, hasta la más económica: dividir por 4 y observar el resto.

En la primera situación el profesor interviene como poseedor del saber matemático, los alumnos aplican las consignas que él les da. Sin embargo, en la segunda, el maestro deja bajo la responsabilidad de los alumnos la búsqueda del conocimiento puesto en juego: dividir por 4, observar el resto de la división y clasificar los números según este resto. Este «saber» no es mencionado en ningún momento por el profesor. El alumno tiene bajo su propia responsabilidad los conocimientos que él moviliza.

La elección por el profesor de los números para clasificar no es arbitraria, sino muy premeditada y controlada, ya que permite que los alumnos pasen de una estrategia de base: necesidad de ubicar efectivamente los números en la tabla para conocer su posición, a una verdadera *anticipación*: sin necesidad de ubicarlos materialmente en la tabla, buscar el conocimiento matemático necesario (dividir por 4 y observar el resto y, en función del resto, conocer la columna correcta y, por medio del cociente, saber la fila idónea, para determinar correctamente su lugar).

«El conocimiento debe manifestarse como instrumento de decisión anticipada.» (Brousseau, 2000, p. 8)[12]

Cuando la estrategia de base se hace costosísima, los alumnos se ven obligados a buscar otra, más económica, mejor adaptada a la situación propuesta. Esta estrategia constituye el conocimiento matemático (objetivo de aprendizaje) de la situación de enseñanza. Cuando el alumno pasa de la estrategia de base a la nueva decimos que ha *construido* un nuevo conocimiento: ha llevado a cabo un aprendizaje.

Margolinas (1993)[13] asegura que una de las funciones de las matemáticas es la de permitir la *anticipación* de los resultados de una acción. El término anticipación comporta un doble sentido: la predicción y la garantía de validez de esta predicción. Para que los alumnos puedan anticipar con garantía de validez su predicción deben ser capaces de establecer pruebas de tipo intelectual, es decir aquellas en las que se excluye la acción efectiva sobre los objetos.

El que se entienda la *acción* en el sentido de una verdadera *anticipación* no quiere decir que, en muchas ocasiones, las manipulaciones no tengan su lugar en el aprendizaje matemático del alumno, todo lo contrario, le permiten, de entrada, *apropiarse del problema*, comprender la naturaleza de la cuestión, hacerse una buena imagen de la situación. La manipulación, la acción efectiva sobre los objetos reales de la situación, facilita la construcción de representaciones que, posteriormente en situaciones análogas, podrán formularse o evocarse mentalmente y permitirán llevar a cabo «acciones» en el sentido matemático del término: construcción de esquemas, cálculos, etc. Además, la manipulación es un medio con el cual el sujeto puede validar sus soluciones, confirmar su anticipación sobre una determinada acción, verificar la pertinencia de una respuesta; aunque con el tiempo, sus conocimientos matemáticos le facilitarán llegar a constataciones que no precisará hacerlas efectivas sobre los objetos reales.

---

[12] Brousseau, G. (2000): *Les grandeurs dans l'escolarité obligatoire*. Cour pour la XI Ecole d'Etè. Université Bordeaux 2.

[13] Margolinas, C. (1995): Ibidem.

• **2ª Hipótesis:** La adquisición, organización e integración de los conocimientos del alumno pasa por estados transitorios de equilibrio y desequilibrio, en el curso de los cuales los conocimientos anteriores se ponen en duda. Si este desequilibrio es superado, esto implica que hay una reorganización de los conocimientos: los nuevos conocimientos se van integrando con los anteriores, apoyados en los procesos de asimilación y acomodación. Se trata de aplicar el modelo facilitado por la de la teoría de la equilibración de Piaget.

> «En el curso de la acción sobre un determinado medio, las contradicciones aparecen en el sujeto como producto de los desequilibrios, y debe modificar sus representaciones, se produce lo que Piaget ha denominado acomodación, que supone, básicamente, una modificación en el sujeto causada por el medio (perturbación). De manera recíproca, las transformaciones realizadas por el sujeto para dar respuesta a las perturbaciones modifican su organización del medio, produciéndose entonces un proceso de asimilación. El doble juego acomodación/asimilación está en el centro de los mecanismos de los procesos de equilibración.» (Chamorro, 1991, p. 58)[14].

El aprendizaje, pues, no se reduce a una simple memorización, a una yuxtaposición de «saber-hacer» o a un condicionamiento, aprendemos raramente de una sola vez; aprender supone volver a empezar, extrañarse, repetir, pero repetir comprendiendo lo que se hace y por qué se hace.

Veamos el siguiente ejemplo:

Pedimos a los alumnos que traten de ampliar un puzzle como el de la figura adjunta. Dividimos la clase en grupos de 6 niños (tantos como piezas tiene el puzzle). Cada miembro del grupo debe construir una pieza ampliada, según la consigna siguiente: en el nuevo puzzle, la longitud del lado de la pieza F, que mide 4 unidades, debe medir 7. Tenéis que construir el resto de las piezas. Cada miembro del grupo construirá una pieza, cuando las tengáis todas debéis mostrar cómo queda el nuevo puzzle ampliado.

Los niños comienzan su trabajo y, normalmente, la gran mayoría pone en funcionamiento una estrategia «aditiva»: sumar 3 a todas las dimensiones de las piezas. Consecuencia: no encajan las piezas del nuevo puzzle.

Esta «respuesta» que obtienen del puzzle (del medio sobre el que actúan) les produce un profundo desequilibrio: la estrategia de base que han puesto en funcionamiento no es válida, las piezas no encajan. No necesitan la reprobación del maestro, es la propia situación la que les responde sobre su acción: se trata de una situación que es *criterio* y *fuente* de aprendizaje.

alumno → sumar 3 unidades a cada lado → medio
medio → (las piezas no encajan) → alumno

Ejemplo 3[15].

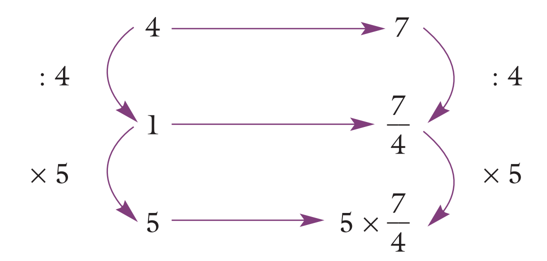
[14] Chamorro, C. (1991): *El aprendizaje significativo en el área de matemáticas.* Madrid: Alhambra - Logman.

[15] Situación propuesta por Brousseau (1998, p. 237) para la construcción del factor de proporcionalidad racional, dentro del bloque de situaciones didácticas para la enseñanza de los números racionales y decimales.

A partir de esta constatación surgen las preguntas, las incertidumbres, la formulación de nuevas hipótesis, los debates entre los miembros de cada grupo, y va emergiendo el conocimiento matemático. El error es, pues, necesario para producir desequilibrios, si no hacemos emerger las estrategias de base erróneas y comprobamos su invalidez funcionalmente, no las rechazaremos nunca y volverán a manifestarse sistemáticamente.

El aprendizaje, bajo esta hipótesis, es un proceso de reconstrucción de un equilibrio entre el sujeto y el medio (situación-problema), por ello, la didáctica de las matemáticas se interesa en las perturbaciones provocadas deliberadamente en un determinado medio con intención de suscitar un aprendizaje.

En el problema anterior, apenas se hubiesen producido errores entre los alumnos si la consigna de ampliación del puzzle hubiese sido: «Debéis ampliar las piezas, de tal modo, que el lado que mide 4 unidades se transforme en 8 unidades». Los alumnos hubiesen calculado el doble de la longitud de los lados de todas las piezas y el éxito estaría asegurado. No habría existido el fuerte desequilibrio provocado por la transformación «ampliar de 4 a 7 unidades» y los alumnos no hubiesen tenido la ocasión de poner en funcionamiento la estrategia aditiva: «sumar 3 unidades a la longitud de todas las piezas», con lo cual no habrían constatado su invalidez y no habrían podido construir con sentido la estrategia óptima:



Este cambio de estrategia, devuelve el equilibrio perdido al subsistema sujeto-medio, y es precisamente el conocimiento que se pretendía que los alumnos construyesen: factor de proporcionalidad racional.

Actividad 4: Determina los posibles desequilibrios que los alumnos pueden encontrar en la resolución del problema de «construcción de la gran ciudad» (ejemplo 1ª – 2ª secuencia). ¿Qué respuestas obtienen del *medio?*

- **3ª Hipótesis:** *Se conoce en contra de los conocimientos anteriores.* Se trata de una idea fundamental de la epistemología de Bachelard[16] (1983) sobre el conocimiento científico, tomada por Brousseau para explicar la formación de **obstáculos**

[16] Bachelard, G. (1983) *La formación del espíritu científico.* Siglo xxi: Buenos Aires.

en el aprendizaje de las matemáticas: *la utilización y la destrucción de los conocimientos precedentes forman parte del acto de aprender* (Brousseau, 1998, p. 120)[17].

Los aprendizajes previos de los alumnos se deben tener en cuenta para construir nuevos conocimientos, ya que éstos no se producen a partir de la nada, su elaboración está sometida a adaptaciones, rupturas y a reestructuraciones, a veces radicales, de los conocimientos anteriores. Aprendemos a partir de y también en contra de lo que ya sabemos. Los nuevos conocimientos no pueden hacerse más que modificando los precedentes y no por simple acumulación de los últimos sobre los ya existentes. Así, por ejemplo, errores cometidos por los alumnos, tales como:

– «El siguiente de 1,78 es 1,79 porque 79 es el siguiente de 78»

– «2,6 es menor 2,358 porque $6 < 358$»

– «$0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}6$ porque $0 \times 0 = 0$ y $2 \times 3 = 6$»

Son consecuencia de sus conocimientos previos sobre los números naturales. Los alumnos aplican al dominio de los números decimales propiedades válidas sólo en N. Esto es debido a que consideran un número decimal como una pareja de números naturales separados por una coma.

Dado que la noción de obstáculo es de suma importancia para el aprendizaje de las matemáticas, dedicaremos más adelante, en este capítulo, un apartado específico para su estudio.

• **4ª Hipótesis:** *Los conflictos cognitivos entre miembros de un mismo grupo social pueden facilitar la adquisición de conocimientos.* Idea básica de la psicología social apoyada en la obra de Vygotsky[18], quien consideraba preciso tener en cuenta lo que un individuo puede hacer con la ayuda de otros, ya que el aprendizaje se produce en un medio social en el que abundan las interacciones, tanto horizontales (niño–niño) como verticales (niño–adulto).

La eficacidad de los conflictos socio-cognitivos se justifica, según Blaye[19] (1994), puesto que:

a) Permiten al alumno tomar conciencia de otras respuestas diferentes a la suya, lo que le obliga a descentrar su respuesta inicial.

b) La necesidad de llevar a cabo regulaciones sociales, para llegar a un consenso, implica que el alumno sea más activo cognitivamente.

---

[17] Brousseau, G. (1998) Ibidem.

[18] Zona de Desarrollo Próxima (ZDP) es la distancia entre el nivel de desarrollo actual, que podemos determinar a través de la forma en que un niño resuelve sus problemas él solo, y el nivel de desarrollo potencial, tal como lo podemos determinar a través de la forma en la que un niño resuelve sus problemas cuando está asistido por un adulto o en colaboración con otros niños más avanzados (Vigotsky, 1978, p. 86; CIRADE, p. 153).

[19] Blaye, A. (1994) «Interacctions sociales et constructions cognitives», En Bernanz, N., Garnier, C. *Construction des savoirs,* (p. 183-195) Quebec: CIRADE.

c) La respuesta diferente de *los otros* es portadora de información y llama la atención del sujeto sobre aspectos de la tarea que no había considerado.

Así, los conflictos socio–cognitivos provocan un doble desequilibrio: «desequilibrio interindividual, debido a las diferentes respuestas de los sujetos; desequilibrio intraindividual, debido a la toma de conciencia de respuestas diferentes, lo que invita al sujeto a dudar de su propia respuesta» (Guilly, 1994)[20].

La situación de ampliación del puzzle (Ejemplo 3) pone en evidencia un conflicto socio-cognitivo. Cada alumno del grupo tiene que construir una pieza diferente y, al final, cuando todos han concluido su tarea, las piezas no encajan. Esto provoca que entre ellos emitan diferentes interpretaciones de la «respuesta que han obtenido del medio», conduciéndoles a formular nuevas hipótesis, debatir entre ellos, probar, rechazar, argumentar, etc.

Cabe señalar también la función de mediador que, en los conflictos socio-cognitivos, lleva a cabo el maestro a través de las puestas en común entre los alumnos. Si la situación propuesta en clase ha sido una situación abierta, de interacción con un medio, se espera que los alumnos se comprometan en procedimientos muy variados, será el momento de organizar el intercambio, el debate, la argumentación, la confrontación, la validación, etc.

Actividad 5: Dadas las siguientes proposiciones:

- Si aumentamos cada uno de los lados de un triángulo el doble, su área queda entonces multiplicada por:

2, 3, 4

Si el radio de un círculo aumenta el doble, su área queda multiplicada por:

2, 3, 4

Describa las posibles respuestas que podrían dar los alumnos. ¿Sobre qué argumentos las podrían validar? ¿La discusión de las respuestas aportadas podría provocar un conflicto socio–cognitivo entre los alumnos de una clase de la escuela Primaria?

Esta fase es primordial para el aprendizaje matemático, «poner en común es hacer público» y en ella el lenguaje, como medio de comunicación social, es primordial. El lenguaje permitirá a los alumnos estructurar la acción, apropiarse de significaciones nuevas, identificar nociones y procedimientos y les abrirá vías para la prueba: la prueba es un acto social, se dirige a un individuo (eventualmente a uno mismo), al que es preciso convencer y requiere una expresión verbal (o escrita o, incluso, representativa). El lenguaje jugará una función determinante para la elucidación de sus conocimientos: es al tratar de responder a los «por qué» y a los «cómo» de los otros alumnos y del maestro cómo cada uno es

[20] Guilly, M. (1994): À propos de la théorie du conflit socio-cognitif et des mecánismes psycho-socieux. En Bernanz, N., Garnier, C. *Construction des savoirs,* (p. 162-183) Quebec: CIRADE.

capaz de volver sobre sus propias acciones, a describirlas, a defenderlas, a tomar conciencia de su pertinencia y validez. Y, recíprocamente, es al interrogar sobre las soluciones aportadas por los otros cómo cada uno puede conocer un nuevo procedimiento, medir el grado de dominio adquirido, reconocer lo que no logra hacer solo, en suma, ampliar su campo de conocimientos.

Actividad 6: El dueño de una cuadra de caballos compra un pura sangre por 6 000 euros, lo vende por 7 000 euros. Más tarde, compra de nuevo este caballo por 8 000 euros y lo revende por 9 000 euros. ¿Cuánto ha ganado?

Entre las respuestas siguientes, determine la que crea correcta:

- Ha perdido 1 000 euros.
- Ha ganado 1 000 euros.
- Ha ganado 2 000 euros.
- Ni ha perdido, ni ha ganado.

¿La resolución de este ejercicio podría provocar un conflicto socio-cognitivo entre los alumnos de la escuela Primaria? Describa y analice las posibles respuestas y los argumentos que las justificarían.

4. Un modelo de aprendizaje constructivista en matemáticas: el aprendizaje por adaptación al medio

Desde que se abandona el campo del empirismo, investigar los problemas del aprendizaje como resultado de la enseñanza, resulta bastante difícil, ya que se trata de relacionar un *aprendiz*, un *profesor* y un *saber específico*, por lo tanto, hay que investigar en el interior de una teoría didáctica y no de una teoría psicológica.

Brousseau (1998)[21] entiende el aprendizaje por adaptación del siguiente modo:

> «El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, *fruto de la adaptación del alumno,* se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje» (p. 59).

Esta concepción del aprendizaje[22] está en muchos aspectos muy próxima a la de Piaget: el alumno *construye* su propio conocimiento y *actúa* en un **medio** fuente de *desequilibrios*. Considera de singular relevancia la elaboración y el

[21] BROUSSEAU, G. (1998) Ibidem.

[22] La teoría de situaciones de BROUSSEAU (1986, 1998) trata de aproximarse, bajo un modelo teórico, al problema del aprendizaje de las matemáticas a través de un proceso de adaptación al medio. Por ello, proporciona herramientas muy potentes para interpretar los fenómenos específicos que se producen en la construcción de los conocimientos matemáticos.

estudio del **medio**, de las situaciones que debemos proponer a los alumnos, que ellos puedan *«vivir»* y en las cuales los conocimientos matemáticos deben aparecer como la solución óptima a los problemas propuestos. Serán situaciones donde el alumno desarrolle un trabajo intelectual comparable, en algunos momentos, a la actividad científica, es decir, donde actúe, formule, pruebe y construya modelos de lenguaje, conceptos y teorías que intercambie con los demás, donde reconozca aquellos que están conformes a la cultura y donde recoja aquellos que le son útiles y pertinentes. Son situaciones de *creación* y no de *redescubrimiento*.

Actividad 7: Situación: «La carrera del 20»:

Se trata de un juego que se lleva a cabo entre dos jugadores. El jugador que comienza debe decir el número 1 o bien el 2 y el contrincante debe decir un número 1 o 2 unidades mayor. Gana el jugador que dice 20 por primera vez.

– Lleve a cabo este juego con un compañero/a de clase. Determine la estrategia ganadora. ¿Qué conocimiento matemático deben «construir» los alumnos para «ganar» en esta situación?

Bajo esta perspectiva, según Brousseau (1994)[24], *enseñar un conocimiento matemático* concreto es, en una primera aproximación, hacer posible que los alumnos desarrollen con dicho conocimiento una actividad de *creación* matemática en el sentido anterior. El profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones matemáticas que ellos puedan vivir, que provoquen la emergencia de genuinos problemas matemáticos y en las cuales el conocimiento en cuestión aparezca como una solución óptima a dichos problemas, con la condición adicional de que dicho conocimiento sea construible por los propios alumnos. La gestión de una enseñanza de las matemáticas que dé respuesta a este modelo de actividad matemática queda bajo la responsabilidad del profesor y no es nada nuevo el afirmar que constituye uno de los más importantes problemas a los que se enfrenta la didáctica de las matemáticas.

En consecuencia, «el aprendizaje se considera como una modificación del conocimiento que el alumno debe producir por sí mismo y que el maestro sólo debe provocar» (Brousseau, 1994, p. 66). Esta consideración del aprendizaje nos lleva a los siguientes razonamientos: para hacer funcionar un conocimiento en el alumno, el docente ha de buscar una situación apropiada. Para que sea una situación de aprendizaje es necesario que la respuesta inicial que el alumno dé, frente a la pregunta planteada, no sea la que queremos enseñarle: si ya fuese necesario poseer el conocimiento a enseñar para poder responder, no se trataría de una situación de aprendizaje, sería de aplicación de conocimientos ya aprendidos o de refuerzo de conocimientos anteriores. La «respuesta inicial» sólo debe permitir al alumno utilizar una estrategia de base con la ayuda de sus conocimientos

[24] Brousseau, G. (1994): Los diferentes roles del maestro. En Parra, C. y Saiz, I. (Eds.): *Didáctica de las matemáticas,* (p. 65-95) Buenos Aires: Paidos.

anteriores; pero, muy pronto, esta estrategia debe mostrarse lo suficientemente ineficaz como para que el alumno se vea obligado a realizar acomodaciones (es decir, modificaciones en su sistema de conocimientos) para responder a la situación propuesta. Esto lo hemos podido constatar por medio de los ejemplos que hemos analizado anteriormente.

El trabajo del docente consiste, pues, en proponer al alumno una situación de aprendizaje para que produzca sus conocimientos como respuesta personal a una pregunta, y los haga funcionar o los modifique como respuesta a las exigencias del medio (situación-problema) y no a un deseo del maestro. Hay una gran diferencia entre adaptarse a un problema que plantea el medio, insoslayable, y adaptarse al deseo del docente. La significación del conocimiento es completamente diferente. Una situación de aprendizaje es una situación donde lo que se hace tiene carácter de necesidad, independientemente de la voluntad del maestro. La resolución del problema se vuelve entonces responsabilidad del alumno, que debe hacerse cargo de obtener un resultado.

Desde esta perspectiva, el alumno aprenderá matemáticas, si:

- Entra en el problema, haciéndolo suyo.
- Pone en funcionamiento una estrategia de «base» (que puede ser pesada y antieconómica, defectuosa...).
- Cuando la estrategia de base se hace insuficiente, trata de superar el desequilibrio y *anticipa* y emite hipótesis que le permitan:
  - Elaborar procedimientos, ponerlos en funcionamiento, y según los efectos producidos, adoptarlos o modificarlos...
  - Automatizar aquellos que sean solicitados con más frecuencia.
  - Ejercer un control sobre los resultados.
  - Construir con sentido un conocimiento matemático.

4.1. Aprendizaje y gestión de variables didácticas

Según acabamos de ver, se considera que el alumno «aprende» cuando modifica él mismo su relación al conocimiento, adaptándose a las situaciones-problema que le presenta el profesor. Entre las elecciones que el profesor lleva a cabo en las situaciones de enseñanza, algunas de ellas van a ser fundamentales por la significación de los conocimientos matemáticos que espera que el alumno aprenda. Estas elecciones fundamentales se denominan *variables didácticas*.

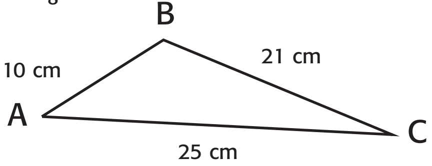
> «Una variable didáctica es un elemento de la situación que puede ser modificado por el maestro, y que afecta a la jerarquía de las estrategias de solución que pone en funcionamiento el alumno (por el costo, por la validez, por la complejidad, etc.)» (Briand, Chevalier, 1995, p. 68)[25].

[25] Briand, J., Chevalier, M.C. (1995): *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques.* París: Hatier.

No podemos considerar que «todo» sea variable didáctica en una situación. Una variable didáctica es un elemento de la situación tal que, si actuamos sobre él, podemos provocar adaptaciones y aprendizajes. Veamos los siguientes ejemplos:

a) Situación de reproducción de un triángulo dado

El profesor divide la clase en dos grupos: emisores y receptores; da al grupo de emisores una hoja en la que hay dibujado un triángulo:



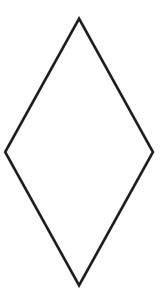
y les indica la siguiente consigna: «Enviar un mensaje escrito al grupo de receptores para que construyan, sin verlo, un triángulo igual al dado». Disponen de doble decímetro.

Los mensajes que envían los alumnos son del tipo: «Construye un triángulo de lados: AB = 10 cm; BC = 21 cm y AC = 25 cm». Los receptores siguen los datos del mensaje y construyen sin dificultades el triángulo pedido.

El profesor a continuación presenta la situación siguiente:

b) Situación de reproducción de un rombo

Da al grupo de emisores una hoja en la que hay dibujado un rombo ABCD, cuyos lados miden 15 cm.



Consigna: «Enviar un mensaje a los receptores, de tal manera, que construyan, sin verlo, un rombo igual al dibujado».

Los emisores miden los lados del rombo y emiten mensajes, en su mayoría, del tipo: debes dibujar una figura con cuatro lados que mida cada uno 15 cm. Es como un cuadrado un poco aplastado.

La figura que construyen los receptores no coincide con la original. Evidentemente, no tienen datos suficientes.

La estrategia de base empleada, análoga a la utilizada para la construcción del triángulo, en este caso, no ha sido válida. Los alumnos se enfrentan a un fuerte desequilibrio. Construyen diversos cuadriláteros, pero no coinciden con el dado.

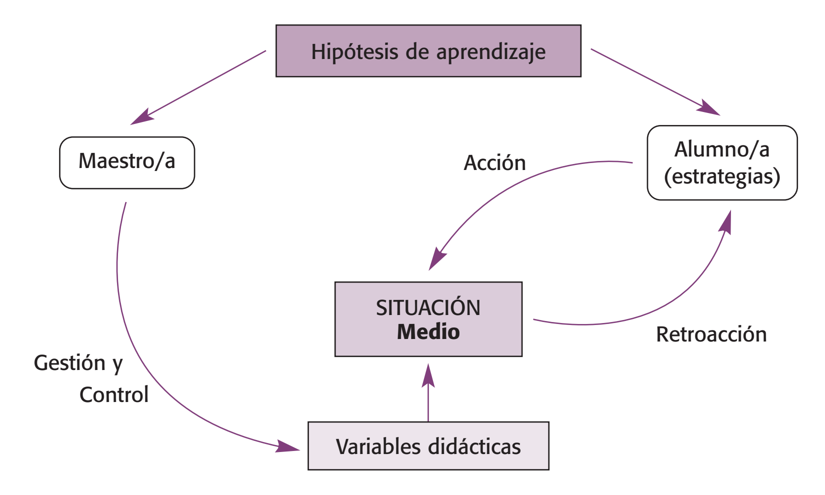
El objetivo de esta situación es que los alumnos sean capaces de tener en cuenta un segmento no representado ostensiblemente en la figura: la diagonal del rombo. Considerando este dato, además de la medida del lado, la figura estará unívocamente determinada. La diagonal, en este caso, no es un elemento descriptivo, sino un elemento necesario para la construcción de esta figura. Esta relación de necesidad sólo la pueden construir los alumnos *con sentido* en este tipo de situaciones.

La elección llevada a cabo por el profesor: dibujar primero un triángulo y posteriormente un rombo supone el control de una variable didáctica[26] muy pertinente en esta situación: el tipo de figura a representar, ya que provoca en el alumno la «necesidad de concebir un segmento no representado» como algo válido para resolver el problema. Ha existido la construcción de un aprendizaje con sentido: la determinación de la diagonal me permite encontrar la solución.

Ejemplo 4.

[26] Ha existido un *«salto informacional»:* se llama salto informacional a un cambio de valor de una variable didáctica en el interior de una situación de aprendizaje susceptible de provocar un cambio de estrategia (BRIAND, 1995, p. 69).

El esquema siguiente muestra la conexión que debe existir entre las hipótesis de aprendizaje adoptadas por el maestro y la gestión que ha de ejercer sobre las variables didácticas de una situación de enseñanza.



En la actividad introductoria (ej. 1, 2ª secuencia de enseñanza), la maestra puede gestionar las siguientes *variables didácticas*: elección y diseño de las piezas para la construcción de la gran ciudad, posibilidad de tirar a la vez uno o más dados, los puntos marcados en cada cara de los dados, la necesidad de escribir un mensaje para «comprar» las piezas, etc. Una gestión adecuada de estas variables permitirá que los alumnos pasen de una estrategia de base: encontrar una pieza que tenga «tantos cuadraditos como puntos tiene el dado», a una nueva estrategia: «descomponer una colección dada en varias subcolecciones cuya unión sea coordinable con la inicial y, posteriormente, construir un mensaje en el que deban formular estas acciones». Cuando el alumno pasa de la estrategia de base a la nueva, decimos que ha **construido** un nuevo conocimiento: ha llevado a cabo un aprendizaje. A diferencia de la 1ª secuencia de enseñanza, en la segunda, la descomposición de los primeros números se construye en un contexto funcional: es necesario descomponerlos porque esto les permite resolver un problema.

Ejemplo 5.

CAPÍTULO 2

En esta situación (véase ejemplo 3) existen dos variables didácticas sobre las que puede actuar el profesor: los números que definen la transformación: n ➔ p (razón de proporcionalidad: p/n).

- Si **p** es múltiplo de **n**, por ejemplo: si la longitud de 4 unidades se transformase en 8 unidades (4 à8), entonces, el alumno se queda en el modelo aditivo y los números con los que trabajará serán enteros (ya que resolverá el problema calculando «el doble» de las longitudes de todas las piezas).
- Si p/n es racional no decimal, tal como ocurría en el ejemplo 3, donde se pedía que la longitud de 4 unidades se transforme en 7 unidades (4 ➔ 7), entonces hay un fuerte desequilibrio, ya que estamos obligados a prescindir del modelo «aditivo» y de los números enteros.

Los valores de n ➔ p ponen en juego el sentido de la multiplicación de un entero por un racional. La gestión que de ellos haga el maestro en la situación, va a permitir al alumno el paso de la multiplicación de un entero por un entero (modelo aditivo, adición reiterada) a la multiplicación de un entero por un racional (modelo multiplicativo, imagen por una aplicación lineal).

Ejemplo 6. Ampliación de un puzzle.

De todo lo anterior podemos deducir que la construcción de situaciones de enseñanza-aprendizaje en las que se determinen variables didácticas, que controladas por el profesor permitan a los alumnos realizar elecciones y anticipaciones, tomar decisiones, llevar a cabo acciones, comunicaciones, etc. que, posteriormente, puedan probar y validar, es una tarea compleja, fruto de un serio análisis didáctico y de una elaborada *ingeniería didáctica*[27].

Actividad 8: Determine las variables didácticas que puede gestionar el profesor en la situación descrita en la actividad 7. Establezca la dependencia que existe entre las elecciones del profesor y las estrategias de solución que pueden llevar a cabo los alumnos.

5. Errores y obstáculos en el aprendizaje

Aunque la teoría sobre los obstáculos epistemológicos tiene sus raíces en la obra del filósofo y epistemólogo de la ciencia Bachelard (1983), la introducción de la noción de obstáculo en la didáctica de las matemáticas se debe a Brousseau: «El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, según se creía en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje; sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, y que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son fortuitos e imprevisibles, su origen se constituye en un obstáculo» (Brousseau, 1998, p. 120)[28].

Se establece, pues, una estrecha conexión entre cierto tipo de errores y la constitución de obstáculos. Veamos una serie de conocimientos que tienen los alumnos, basados en aprendizajes hechos en escuela elemental, generalmente implícitos, que ponen en funcionamiento en sus tareas escolares:

- *Todo número es siempre mayor que su mitad:* la mitad de 24 es 12.
- *Sumar dos números significa ir añadiendo al primero, una a una, todas las unidades que tiene el segundo:* 35 más 7 es igual a 42 (36, 37, 38, 39, 40, 41 y 42).
- *El siguiente de un número es siempre una unidad mayor que él*: el siguiente de 3453 es 3454...
- *Para multiplicar $a \cdot b$ es necesario sumar **a** consigo mismo tantas veces como indica **b***: $7 \times 5 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7$.

Estos conocimientos tienen un dominio de validez limitado: el conjunto de los números naturales; en este dominio, su empleo conduce a respuestas correctas, pero cuando los alumnos los aplican a otros dominios numéricos, como

[27] Este apartado se tratará en el Capítulo 3 de este libro.

[28] Brousseau, G. (1998) Ibidem.

el de los números decimales o los números enteros, les provocan errores persistentes o inadaptaciones locales que conllevan pérdidas de sentido:

- «$\frac{1}{2}$ (-8) < (-8)» ➔ error
- sumar: 2347 + 0,567 + ➔ inadaptación
- «el siguiente de 1,6 es 1,7» ➔ error
- multiplicar: 2,75 × 14,348 ➔ inadaptación

Los caracteres esenciales que nos permiten identificar, en los comportamientos de los alumnos, un obstáculo epistemológico son:

– Siempre se trata de un conocimiento, no de una ausencia de conocimiento.

– Este conocimiento permite al alumno producir respuestas correctas en determinados dominios de problemas.

– Este mismo conocimiento engendra respuestas erróneas para ciertos campos de problemas.

– Los errores producidos no son esporádicos sino muy persistentes y resistentes a la corrección.

El origen de los obstáculos puede ser: epistemológico, ontogenético y didáctico.

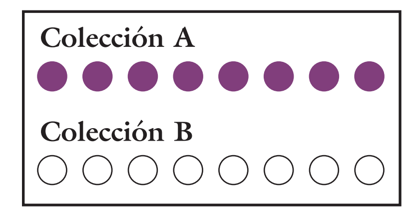
Los *obstáculos de origen epistemológico* están estrechamente ligados al saber matemático. La construcción del conocimiento matemático se enfrenta y se apoya en ellos. El proceso de aprendizaje que llevan a cabo los alumnos pasa por situaciones en las que, necesariamente, se encuentran con ellos.

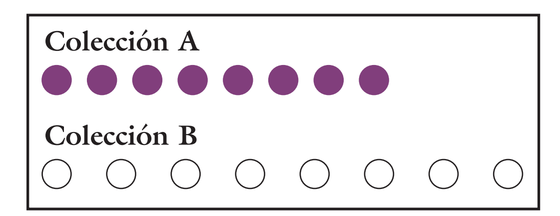
Actividad 9: Los errores que siguen los cometen los alumnos de forma persistente:

$\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{1}{8}$ $(a+b)^2=a^2+b^2$ $2^3+2^5=2^8$

¿Podría determinar el obstáculo epistemológico que los provoca?

- Los *obstáculos de origen ontogenético* están ligados al desarrollo neurofisiológico de los sujetos. Los errores que cometen los alumnos en torno a la conservación de las colecciones de objetos son de este tipo. Así, dadas las dos situaciones siguientes[29]:





[29] Ejemplo propuesto en BRIAND, J, CHEVALIER, M.C. (1995, p. 118).

alumnos de una determinada edad admiten perfectamente que, en la primera situación, las dos colecciones A y B tienen la misma cantidad de elementos, mientras que en la segunda, sólo por tener la colección B sus elementos más expandidos, les conduce a afirmar que la cantidad de elementos de B es mayor que la de A. En este caso, la percepción espacial de la colección se impone a la lógica numérica. Se trata de errores cometidos por alumnos que están en un estadio del desarrollo cognitivo caracterizado por la falta de conservación de las cantidades.

- Los *obstáculos de origen didáctico* son debidos a las decisiones que toma el profesor o el propio sistema educativo en relación con algunos conocimientos matemáticos. Por ejemplo, la presentación ostensiva que llevan a cabo los profesores de las figuras geométricas, a la que anteriormente nos hemos referido, constituye un verdadero obstáculo didáctico para los procesos de prueba y demostración en geometría. Los alumnos mantienen durante mucho tiempo una profunda confusión entre el simple dibujo que «muestra», basta con mirar, y la construcción geométrica fundada en propiedades, proposiciones y teoremas geométricos.

Pedimos a los alumnos que lleven a cabo la tarea que sigue:

Medir el segmento AB A ——— B

tomando como unidad de medida el segmento U

La mayoría de los alumnos proceden superponiendo el segmento AB reiteradamente sobre U y dan la medida de U tomando como unidad el segmento AB. Se resisten a medir con una unidad mayor el objeto a medir. «¿Cómo vamos a medir AB con U?» Normalmente, en las aulas, este tipo de actividades está ausente, en caso de llevarse a cabo medidas efectivas sobre objetos reales, la unidad de medida es generalmente menor que el objeto a medir. Así, esta decisión didáctica constituye un verdadero obstáculo didáctico para generar conocimientos matemáticos relativos a la necesidad del fraccionamiento de la unidad de medida o a la conmensuración de cantidades de longitud.

Ejemplo 7.

Actividad 10: Ante una tarea escolar en la que se pedía llevar a cabo la descomposición canónica de números naturales, los alumnos dieron las siguientes respuestas:

235 = 200 + 30 + 5,	3 576 = 3 000 + 500 + 70 + 6,	47 = 40 + 7
50 = 47 + 3	70 = 65 + 5	340 = 300 + 40

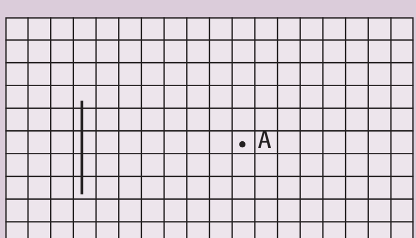
El maestro corrigió las tres últimas indicando a los alumnos que debían expresar canónicamente:

50 = 50 + 0, 70 = 70 + 0, 340 = 300 + 40 + 0 (debéis «sumar cero», hay ausencia de unidades)

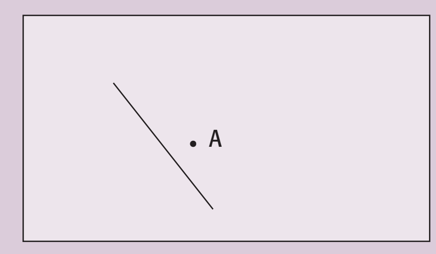
¿Por qué razones didácticas, la mayoría de los alumnos, en sus producciones, no incluyó el cero como un sumando en la descomposición canónica?

Actividad 11: Resuelva las siguientes actividades escolares y determine su diferencia, desde el punto de vista de los conocimientos matemáticos qué es necesario movilizar en cada una de ellas:

– Dado el lado **a** *dibuja* un rectángulo con centro en A:



– Dado el lado **a** *construye* un rectángulo con centro en A:



¿Qué posibles estrategias podrán desarrollar los alumnos para resolverlas? ¿Qué conocimientos, de los aplicados por los alumnos en la primera actividad, pueden constituirse en obstáculo para la segunda?

En general, podemos afirmar que los obstáculos entran normalmente en el proceso de construcción del conocimiento, es ilusorio querer evitar a toda costa los errores debidos a los obstáculos. Bien al contrario, los alumnos deben enfrentarse a ellos, superarlos y tomar conciencia de sus limitaciones. Para que esto sea posible el profesor debe necesariamente ponerlos ante situaciones donde interactúen con un medio que les provoque desequilibrios y retroacciones.

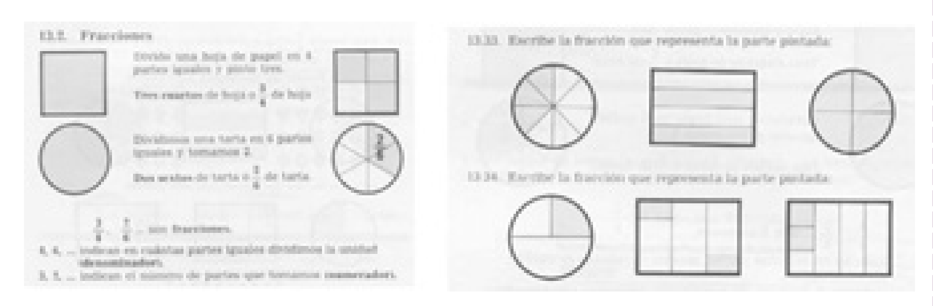
6. Concepciones de los alumnos

Nuestros alumnos, a lo largo de su escolaridad, van a tener múltiples relaciones con los saberes matemáticos propios de esta etapa de enseñanza: número natural, operaciones, algoritmos, número racional, fracciones, proporcionalidad, ecuaciones, figuras, propiedades, transformaciones geométricas, etc. Se encontrarán con problemas y actividades que provocarán un intercambio permanente entre sus conocimientos sobre un determinado objeto matemático y los problemas y situaciones donde deba utilizarlo. Este intercambio va generando en ellos una determinada concepción sobre el mismo, que se manifestará en: la manera de disponer, de describir, de decidir, de representar, de hacer uso de este objeto matemático en dichas situaciones.

El término *concepción* del sujeto permite al profesor explicar los comportamientos de los alumnos ante las tareas matemáticas, es decir, los procedimientos que emplean, las definiciones que utilizan, los ejemplos que proponen, los errores que cometen, etc.

Para comprender mejor su significado, veamos los ejemplos que siguen:

Los alumnos de Primaria, que van a comenzar el estudio de los números racionales y las fracciones, tienen en su libro de texto una introducción y diversas actividades análogas a las que siguen:



Es evidente que este tipo de actividades provoca en los alumnos una determinada «concepción» de la noción de fracción que podemos identificar como «fraccionamiento de una unidad entera»: se trata de dividir una unidad inicial en partes que podemos declarar iguales (unidades fraccionarias) y establecer una relación entre el resultado de la partición y las unidades fraccionarias que se toman.

Esta concepción, según afirma Ratsimba-Rajason (1990), está generada por la consideración dada al objeto fracción en los casos anteriores, se describe el modo de componer este objeto: *«primero dividimos en partes iguales y luego tomamos algunas de esas partes»*. Pero hemos de reiterar que esta concepción no la adquieren los alumnos espontáneamente sino que la desarrollan en contacto con una familia de situaciones, en el medio escolar y a lo largo de años. Esta concepción puede adaptarse a otras situaciones, evolucionar, también puede engendrar otras concepciones o dificultar su aparición.

Ejemplo 8.

Veamos ahora, en la actividad 12, un modelo de situación didáctica que permite a los alumnos construir otra concepción de la noción de fracción:

Actividad 12: Una maestra propone la siguiente situación a sus alumnos:

He preparado cuatro cajas de papel: A, B, C, D. Cada una de ellas contiene folios de papel de diferente espesor. En el comercio, normalmente, se identifican las calidades de papel por el peso (por ejemplo: 500 hojas de una clase pesan 238 g, mientras que 500 hojas de otra clase diferente pesan 350 g).

Vosotros vais a inventar otro modo de designar y reconocer el espesor de cada tipo de papel, de modo que los podamos distinguir sólo por su espesor.

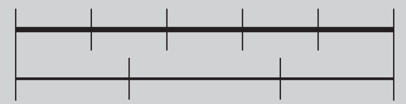
La maestra divide a los alumnos en grupos para llevar a cabo la tarea, disponen de un doble decímetro y de un calibrador.

Los alumnos, tras numerosos debates, incertidumbres, errores y constataciones, escriben sus resultados en una tabla preparada por la maestra en la pizarra:

Tipo de papel	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
A	20 hojas, 3 mm	19 hojas, 3mm	20 hojas, 4 mm
B	30 hojas, 3mm	20 hojas, 2 mm	100 hojas, 9 mm
C	9 hojas, 4mm	7 hojas, 3 mm	12 hojas, 5 mm
D	15 hojas, 2 mm	20 hojas, 3 mm	22 hojas, 3 mm

- ¿Qué procedimientos han puesto los alumnos en funcionamiento para resolverlo?
- ¿Qué concepción de la noción de fracción permite esta situación que construyan los alumnos?
- ¿Cómo pueden establecer relaciones entre las diversas calidades de papel?
- ¿Permite esta situación generar un conflicto socio-cognitivo entre los alumnos de la clase?
- ¿El medio sobre el que se ha construido esta situación permite ser criterio y fuente de aprendizaje?

Relación de conmensuración entre dos cantidades: Una determinada cantidad *m* (si existe), será los $\frac{3}{5}$ de otra cantidad *n*, si adjuntando 5 veces *m* consigo misma, la cantidad resultante es igual que la cantidad obtenida adjuntando 3 veces *n* consigo misma. Así, por ejemplo: si *m* y *n* fuesen cantidades de longitud:



$5\,m = 3\,n$

Según Ratsimba-Rajason (1990), esta definición no dice cómo construir los $\frac{3}{5}$ de una cantidad, sino que suministra un algoritmo de reconocimiento: permite decir si una cantidad *m* es o no los $\frac{3}{5}$ de otra cantidad *n*. Este investigador ha mostrado que la concepción que generan los alumnos de la fracción como «fraccionamiento de la unidad» se constituye en un obstáculo epistemológico para la concepción de la fracción como relación de «conmensuración entre cantidades».

Actividad 13: Si los alumnos sólo se encuentran con situaciones como las que figuran en el ejemplo 8 ¿qué sentido darán a las fracciones del tipo $\frac{17}{5}$?

¿Qué sentido podrán dar al producto de las fracciones: $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4}$?

En la práctica escolar nos podemos encontrar con casos en los que exista superposición, apilamiento o amalgama de concepciones en el alumno. Para poder rechazar las que le causan errores o, en su caso, modificarlas, es preciso que se encuentre ante un auténtico conflicto cognitivo y que sufra un fuerte desequilibrio. Éste determinará la existencia de un obstáculo epistemológico poniendo de manifiesto los límites de una concepción antigua.

«El rechazo de una concepción y la adopción de una nueva no se hace por una simple explicación del profesor, sino cuando el alumno se enfrenta a situaciones específicas donde la nueva concepción aparece, bien como solución necesaria y única, bien como solución más económica, más segura, mejor adaptada, óptima para su resolución» (El Bouazzaoui, 1988, p. 38).

Es en este punto donde la elaboración de situaciones, fruto de una investigación seria y rigurosa de *ingeniería didáctica*, puede hacer que los alumnos superen aquellas concepciones que les provocan errores repetitivos y resistentes, construyendo otras nuevas o modificando las anteriores a través de un proceso adaptativo.

Actividad 14: Dibujar el segmento unidad, sabiendo que AB es $\frac{2}{5}$ de la unidad.

A ———————————————— B

Si esta actividad se propone a los alumnos que tienen una concepción de la noción de fracción basada en el «fraccionamiento de la unidad», ¿qué tipo de dificultades tendrían?

Actividad 15: Revise varios manuales escolares y determine las:

- Definiciones de fracción y número racional que aparecen.
- Actividades que proponen a los alumnos.
- Representaciones que emplean.

¿Qué concepciones podrán generar los alumnos que lleven a cabo estas actividades?

Actividad 16: Determine varias actividades donde la noción de fracción pueda «funcionar» bajo la concepción de «relación de conmensuración entre cantidades de magnitudes».

Actividad 17: En la situación de ampliación de un puzzle, anteriormente estudiada. ¿Qué concepción han de rechazar los alumnos para llegar a la solución? ¿Qué concepción de fracción han de construir para llegar a la solución correcta?

Como hemos visto en los ejemplos y actividades anteriores, las concepciones que elaboran nuestros alumnos son inducidas por la enseñanza, pero puede ocurrir que estén:

- **Controladas por la enseñanza**: construidas por los alumnos y provocadas intencionalmente por el profesor con objeto de hacerles adquirir una noción.
- **Incontroladas por la enseñanza**: construidas por los alumnos en situaciones de aprendizaje escolar y no provocadas intencionalmente por la enseñanza.

Actividad 18: Proponemos varias concepciones de alumnos de la escuela Primaria que, si bien están inducidas por la enseñanza, aunque no provocadas intencionalmente, se pueden constituir en obstáculos para otros conocimientos:

- Todos los triángulos tienen los tres lados iguales y «reposan» sobre una base.
- Si una figura tiene la misma área que una dada, tiene que conservar la misma forma.
- Un número decimal es una pareja de números naturales separados por una coma.
- Si el área de una figura aumenta, su perímetro aumenta también.
- Si lado de un cuadrado aumenta el doble, su área también aumenta el doble.

¿Cuál es el dominio de validez de cada una de estas concepciones?

Determine algunas situaciones-problema en las que, si los alumnos aplican estas concepciones, cometerán errores.

6.1. El saber matemático: fundamento para la modelización y análisis de las concepciones de los alumnos

Para llevar a cabo un serio análisis didáctico de las concepciones de los alumnos es necesario, como acabamos de ver en los ejemplos anteriores, analizar el propio saber matemático, ya que, aunque las concepciones se manifiestan a través de los comportamientos y procedimientos de los alumnos, necesariamente se modelizan tomando como base las propias estructuras matemáticas. Veamos el siguiente ejemplo:

> Una profesora da a cada uno de sus alumnos un círculo (recortado en papel cartulina, no cuadriculado). El centro del círculo no está marcado. Pide a los alumnos determinar con la mayor precisión posible el centro del círculo. Pueden usar: regla, compás y escuadra.

Para analizar los posibles conocimientos que los alumnos podrían movilizar ante esta tarea, estudiaremos varias definiciones formales[30] de la circunferencia:

> **D1:** Se llama circunferencia a toda curva cerrada plana que admite infinitos ejes de simetría concurrentes.
>
> **D2:** Sea C una curva cerrada, plana y convexa (el borde de una parte convexa G del plano) que admite en todo punto una tangente. Para toda dirección $\overline{d}$, designamos por a_d el límite superior de las longitudes de los segmentos de dirección $\overline{d}$ contenidos en G.
>
> C es una circunferencia si y sólo si:
>
> – Para cada dirección $\overline{d}$, a_d es la longitud de un segmento único D_d de dirección $\overline{d}$, incluido en G,
>
> • Todos los segmentos D_d tienen la misma longitud.
>
> • Todos los segmentos D_d son concurrentes.
>
> **D3:** Una circunferencia, de centro O y radio r, es, en el plano, el conjunto de puntos situados a una distancia r de O.
>
> **D4:** Una circunferencia es una curva cerrada, que para cualquiera que sea su longitud, contiene el área máxima.

Estas definiciones, lógicamente equivalentes, definen el mismo objeto matemático, pero corresponden a formas diferentes de «ver» la circunferencia y de utilizar sus propiedades, así, a partir de ellas, se pueden generar concepciones matemáticas diferentes, esto lo expresamos en la tabla **1**:

[30] Nos hemos basado en Artigue (1988): *Conceptions du cercle à l'école elémentaire*. IREM. París VII.

Tabla 1: Relación entre definiciones y concepciones

	Definición			
	D1	**D2**	**D3**	**D4**
Concepción	**Global**	**Global**	**Puntual**	**Global**
Centro	punto de intersección de los ejes de simetría	presente para completar la definición	esencial en la definición	ausente en la definición
Radio	ausente en la definición	ausente en la definición	interviene en la definición bajo forma de medida	ausente en la definición
Diámetro	incluido como eje de simetría	definido como cuerda maximal	ausente en la definición	ausente en la definición

Hemos distinguido, desde el punto de vista matemático, dos concepciones de la circunferencia:

- Global: si se considera como una curva («figura geométrica curva»).
- Puntual: si se considera como conjunto de puntos.

Cada una de ellas, como se destaca en la tabla **1**, tiene elementos que la determinan de modo específico.

Basándonos en este análisis matemático, vamos llevar a cabo un análisis didáctico de los conocimientos que los alumnos podrían movilizar para resolver el problema, identificando, de este modo, sus posibles concepciones:

Tabla 2: Concepciones y procedimientos de los alumnos

Concepción	**Procedimientos para determinar el centro de la circunferencia**	
Global	1	El alumno pliega el círculo de cartulina dos veces consecutivas (obtiene un primer semicírculo y sobre este último vuelve a plegar de nuevo). El punto de intersección de los dos pliegues determina el centro de la circunferencia. Implícitamente pone en funcionamiento nociones contenidas en la definición: D1. Lleva a cabo un control pragmático de su estrategia, basado exclusivamente en la percepción.
Global	2	El alumno traza segmentos paralelos entre sí utilizando la regla; entre todos los que traza, observa que existe uno mayor, señala su punto medio y este punto lo designa como centro de la circunferencia dada. Utiliza implícitamente nociones contenidas en la definición: D2. Lleva a cabo un control pragmático de su estrategia, basado exclusivamente en la percepción.

Concepción	Procedimientos para determinar el centro de la circunferencia	
Puntual	3	El alumno toma tres puntos cualesquiera de la circunferencia: A, B y C. Traza con ayuda de la regla y el compás las mediatrices de los segmentos AB y CD. El punto en el que se cortan determina el centro de la circunferencia. Emplea nociones contenidas en la definición: D3. Los conocimientos que pone en funcionamiento le aseguran un control matemático (y no sólo perceptivo) de su estrategia.
Puntual	4	Coloca el vértice correspondiente al ángulo recto de la escuadra en un punto cualquiera de la circunferencia, y dos lados de la escuadra cortan a la circunferencia en los puntos B y C. El punto medio del segmento BC lo designa como centro de la circunferencia. Utiliza nociones contenidas en la definición: D3. Los conocimientos que pone en funcionamiento le aseguran un control matemático (y no sólo perceptivo) de su estrategia.
Puntual	5	Utilizando el compás, intenta varias veces ubicar la «aguja» (de uno de sus brazos) en un posible centro, toma un radio y trata de construir una circunferencia de modo que coincida con la dada. Utiliza elementos de la definición: D3. Lleva a cabo un control pragmático de su estrategia, basado exclusivamente en la percepción.

Este estudio previo es básico para analizar las concepciones de los alumnos a través de sus respuestas al problema dado. En sus procedimientos y técnicas de resolución emplearían diferentes propiedades de la circunferencia, no todos la caracterizarían del mismo modo, nos mostrarían diversos niveles de conocimientos, desde los más perceptivos e intuitivos hasta los de más alto nivel matemático, es decir, manifestarían diferentes concepciones sobre un mismo objeto matemático.

Actividad 19: A partir de esta situación, podríamos preguntarnos:

¿El material sobre el que se recorta el círculo constituye una variable didáctica en esta situación? ¿Qué procedimientos no podrían emplear los alumnos, si el círculo dado no fuese de cartulina, sino de madera? ¿El control pragmático de la solución se puede constituir en un obstáculo para la «demostración» en geometría?

Actividad 20: Revise varios manuales escolares y determine las:

- Definiciones de la circunferencia que aparecen.
- Actividades que proponen a los alumnos.

¿Qué concepciones de la circunferencia se privilegian en cada uno de ellos?

¿Qué concepciones podrán movilizar los alumnos que lleven a cabo las actividades de estos textos?

Actividad 19: Dada la siguiente situación–problema: dados dos puntos A y B distantes 8 cm. Determinar un punto M que diste de A 6 cm y de B 5 cm.

¿Qué concepción de la circunferencia podrían movilizar los alumnos para construir una estrategia válida, que permita determinar el punto M?

La noción de concepción[31] es una herramienta muy útil para el análisis didáctico, ya que permite al profesor describir y explicar los aprendizajes que manifiestan los alumnos en relación con un conocimiento matemático: procedimientos, modelos de comportamiento, definiciones, representaciones, errores, obstáculos, etc. También permite al profesor analizar el saber matemático, con objeto de generar situaciones didácticas donde, al actuar sobre ellas, los alumnos puedan rechazar concepciones erróneas o concepciones cuyo dominio de validez sea muy limitado, y *construir* por ellos mismos una nueva concepción.

7. Aprendizaje y teoría de los campos conceptuales

La teoría de los *campos conceptuales*, debida a Vergnaud (1990)[32], tiene como objeto proporcionar un cuadro teórico coherente para analizar, de una parte, las complejas competencias que los alumnos deben desarrollar en el aprendizaje matemático, y de otra, la estructura matemática de los problemas escolares. En esta sección vamos a introducir los elementos más significativos de esta teoría.

7.1. Esquemas. Invariantes operatorios

Para Vergnaud (1990) la mayoría de los conocimientos que desarrollan los alumnos en situación escolar son competencias que normalmente se manifiestan, se hacen explícitas, a través de sus acciones. La noción de *esquema*, introducida por Piaget hace más de medio siglo, la considera fundamental para analizar las competencias de los alumnos ante determinadas situaciones:

> «Un esquema es una organización invariante de la conducta del sujeto para una clase determinada de situaciones» (Vergnaud, 1995, p. 177)[33].

La noción de *esquema* se puede considerar como un saber-hacer «listo para ser utilizado» en la resolución de problemas.

---

[31] Tanto la *teoría de situaciones* de Brousseau (1998) como la teoría de los *campos conceptuales* de Verganud (1991) consideran básica la noción de concepción en su formulación.

[32] VERGNAUD, G. (1990): «La théorie des champs concetuels». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10, 2-3, 133-170.

[33] VERGNAUD, G. (1995): «Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation». En Noirfalise, R. (Ed.) *Actes VIII Ecole de ETE sur la Didáctique des Mathématiques*, p. 174-186. París: DIDIREM-París VII.

Existen dos nociones: *concepto en acto* y *teorema en acto* que designan los conocimientos contenidos en los esquemas del sujeto: «también los podemos denominar por la expresión más global de invariantes operatorios» (Vergnaud, 1990, p. 139).

Para comprender el significado de las nociones *concepto en acto* y *teorema en acto*, leamos detenidamente los ejemplos 9 y 10 propuestos por Vergnaud (1995)[34].

Los *conceptos en acto* y los *teoremas en acto* son propios de los alumnos, tienen carácter implícito, les permiten elaborar procedimientos de resolución en una determinada situación, en consecuencia, están totalmente ligados a los problemas en los que los alumnos los ponen en funcionamiento.

La determinación de los invariantes operatorios: *conceptos-en-acto* y *teoremas-en-acto* es fundamental para el estudio de los procesos cognitivos que regulan el aprendizaje de los alumnos y para la configuración de los esquemas propios del aprendizaje de las matemáticas.

Invariantes operatorios:

- *Concepto en acto*: concepto que el alumno, implícitamente, tiene como adecuado.
- *Teorema en acto*: una proposición considerada verdadera por el alumno.

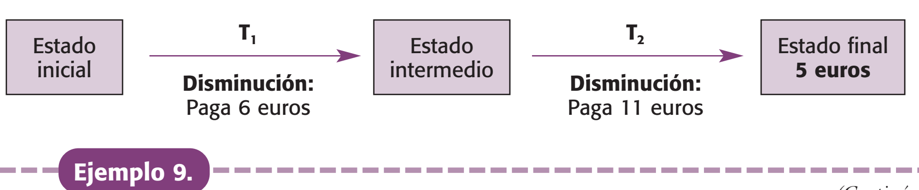
Estos elementos cognitivos permiten que la acción del sujeto sea operatoria, es decir, que lleve a cabo acciones encaminadas a resolver problemas.

Análisis didáctico de varios procedimientos que pueden movilizar los alumnos para resolver el siguiente problema escolar:

María ha pagado 6 euros en la pastelería, más tarde 11 euros en la carnicería. Le quedan 5 euros. ¿Cuánto dinero tenía en su monedero antes de ir a la pastelería?

- Procedimiento **A**: sumar 11 euros con 5 euros, lo que da 16 euros, adjuntarle 6 euros, de lo que resultará 22 euros.
- Procedimiento **B**: hacer la hipótesis de que María llevaba 20 euros, quitarle 6 euros, lo que dará 14 euros; quitarle después 11 euros, quedarán 3 euros. Como en realidad, según el enunciado, le quedan 5 euros, se debe corregir la hipótesis inicial y:
  - Procedimiento $\mathbf{B_1}$: ensayar con números mayores que 20, tales como 21 y 22, hasta encontrar la solución.
  - Procedimiento $\mathbf{B_2}$: considerar que el estado final: 5 euros es dos unidades mayor que 3 euros y, puesto que la hipótesis inicial fue 20, basta con sumar: 20 euros + 2 euros = 22 euros.

El problema anterior lo podemos estructurar del siguiente modo:



Ejemplo 9.

(Continúa)

[34] VERGNAUD, G. (1995) Ibidem.

Existen tres estados y dos transformaciones; los datos del problema nos permiten conocer las dos transformaciones y el estado final, se debe determinar el estado inicial.

En los tres procedimientos de resolución descritos: **A**, $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$ los conceptos de estado inicial, estado intermedio y estado final, son necesarios para ubicar en el lugar correcto cada una de las informaciones del problema. Vergnaud (1995) los designa como *conceptos-en-acto*. Son relativamente simples, y son distintos de los conceptos de parte y todo con los que se trabaja habitualmente los problemas de adición y sustracción.

El procedimiento **A** se basa en un *teorema-en-acto* muy importante para resolver este tipo de problemas:

Estado FINAL = Transf. (Estado INICIAL) $\Rightarrow$ Estado INICIAL $\Rightarrow$ T^{-1} (Estado FINAL)

Estado final = Transformación (Estado inicial) $\Rightarrow$ Estado inicial $\Rightarrow$ Transformación inversa (Estado final)

Este *teorema-en-acto* permite invertir el sentido de la transformación y de su operación correspondiente: si T es una sustracción, T^{-1} es una adición, y recíprocamente.

En los procedimientos tipo **B** el teorema anterior no está presente, en su lugar aparece otro *teorema-en-acto* diferente: *si el estado final obtenido en la primera hipótesis es diferente del estado final dado en el enunciado, es preciso formular una nueva hipótesis sobre el estado inicial.* Basándose en este teorema, con pequeñas modificaciones, surgen dos procedimientos diferentes:

$\mathbf{B_1}$**:** aumentar progresivamente la hipótesis inicial.

Est. Final (hipótesis 1) < Est. Final (dado en el enunciado) ➔ Est. Inicial (hipótesis 2) > Est. Inicial (hipótesis 1)

$\mathbf{B_2}$**:** aumentar la hipótesis sobre el estado inicial, a partir de la diferencia entre el estado final obtenido y el estado final dado en el enunciado.

Inicial (hipótesis 2) = Inicial (hipótesis 1) + (Final dado – Final hipótesis 1)

Ejemplo 9.

Proponemos a los alumnos la resolución de las siguientes ecuaciones:

$3x + 14 = 35$ $\quad$ $3x + 35 = 14$ $\quad$ $35 - 3x = 14$

Aun cuando las tres ecuaciones son casos particulares de la ecuación $ax + b = c$, existe un esquema de resolución empleado por los alumnos con alto grado de disponibilidad y efectividad para a, b y c positivos y $c > b$, esto muestra una organización invariante de su conducta apoyada sobre *teoremas-en-acto* tales como los que siguen:

- *Una igualdad se conserva sustrayendo **b** en ambos miembros.*
- *Una igualdad se conserva dividiendo por **a** en ambos miembros.*

El esquema de resolución funcionará con mayor efectividad en el caso de la primera ecuación, ya que 14 es menor que 35 y su diferencia será un número positivo, mientras que en la segunda ecuación: 14 – 35 es un número negativo, lo que provocará una dificultad añadida, y en el tercer caso el alumno se encuentra ante la expresión –3x, que le provocará una nueva dificultad. Los alumnos suelen emplear correctamente el algoritmo general de resolución de la ecuación **ax + b = c** cuando a, b y c son positivos y $c > b$, sin embargo, fuera de esta clase de situaciones muchos alumnos emplean esquemas de resolución diferentes, personales:

$-3x = 14 - 35,$ $\quad$ $-3x = -21,$ $\quad$ $x = -21 + 3,$ $\quad$ $x = -18$

que en muchas ocasiones les conducen a error. Así, la fiabilidad de un esquema para el sujeto reside en última instancia sobre el conocimiento que tiene, explícito o no, y las características del problema a resolver, es decir, de la situación.

Ejemplo 10.

El ejemplo 10 nos permite observar que los *esquemas* movilizados por los alumnos tienen necesariamente que sufrir procesos de adaptación en el curso de su desarrollo. Un esquema primitivo, inicial, que funciona correctamente en una clase muy restringida de situaciones, debe evolucionar para ser válido en otra clase más amplia: «podemos hablar de una *deslocalización*, de una generalización de la clase de situaciones en las cuales el esquema primitivo era operatorio hacia otras situaciones nuevas a las que ampliarse» (Vergnaud, 1990, p. 141).

En situaciones de ordenación de números naturales, el sujeto puede poner en funcionamiento un esquema que contenga el siguiente *teorema-en-acto:* «Dados dos números el mayor es el que tiene la escritura más larga». Este teorema, que es válido en N, produce resultados correctos en su ampliación al conjunto de números decimales, para el caso de comparar números tales como 5, 73 y 2,1, pero produce errores cuando se trata de comparar, por ejemplo: 3,789 y 3,9.

Ejemplo 11.

«Un esquema es una totalidad organizada que permite generar un tipo de conductas diferentes en función de las características particulares de cada una de las situaciones a las cuales se dirige» (Vergnaud, 1990, p. 159).

Constatamos de nuevo que los *esquemas* tienen un carácter estrictamente local, están vinculados estrechamente a las situaciones problema en las que se hacen operativos, por ello Vergnaud considera fundamental para la didáctica de las matemáticas el estudio de «campos conceptuales». Pasemos a estudiar brevemente el campo conceptual de las estructuras aditivas.

7.2. Campo conceptual de las estructuras aditivas[35]

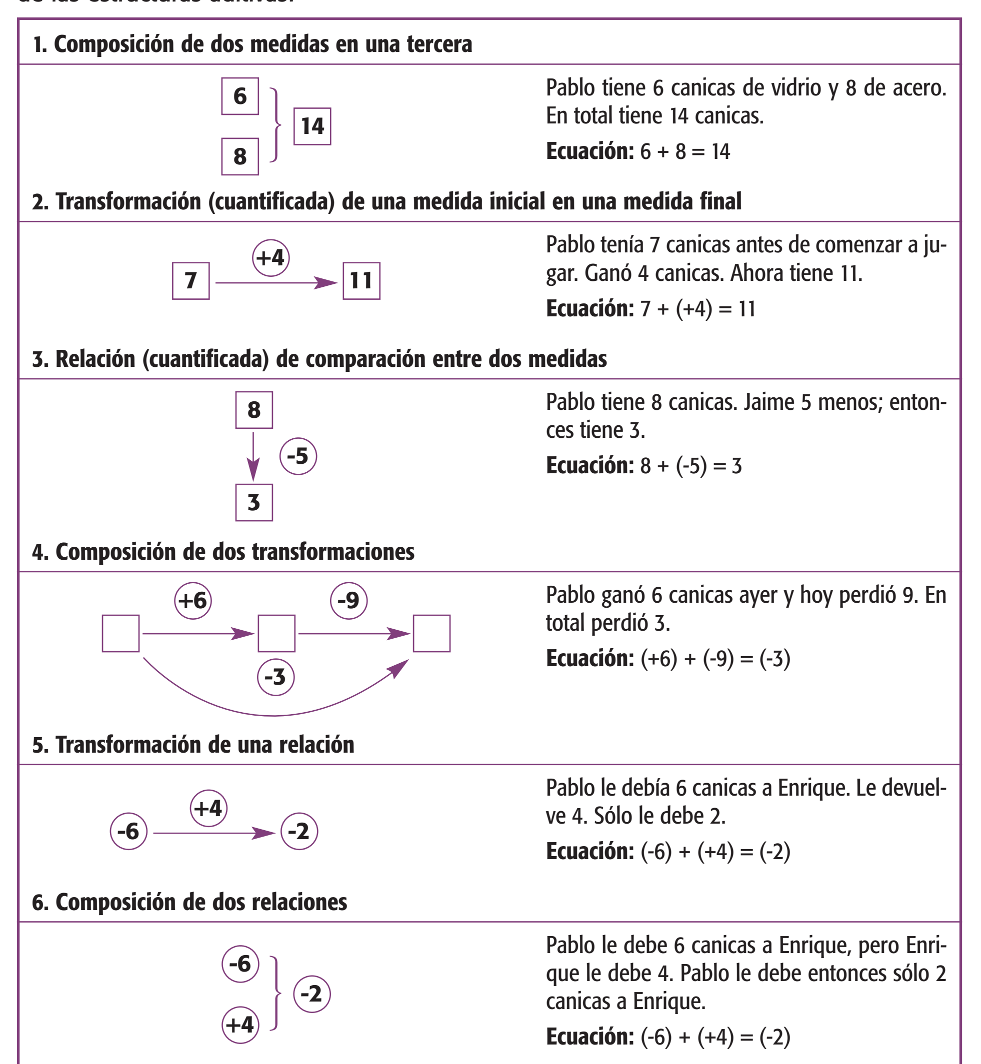
Se considera un campo conceptual como un «conjunto de situaciones problema cuyo tratamiento implica conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas en estrecha conexión». (Vergnaud, 1995, p. 184).

En el campo conceptual de las estructuras aditivas vamos a estudiar problemas aritméticos adaptados al modelo: **a + b = c**. Se trata de problemas que cubren relaciones muy diferentes, desde las más simples y elementales, con las que inicialmente se encuentran los niños de 5 a 7 años, a las más complejas, cuya comprensión no la alcanzan hasta los 14 o 15 años. En la tabla **2** se presentan las seis categorías que propone Vergnaud (1991) para analizar los problemas aditivos y sustractivos.

[35] En el capítulo 6 de este libro se estudiará de modo exhaustivo este campo conceptual.

Los ejemplos y esquemas pertenecen a VERGNAUD, G. (1991): *El niño, la matemática y la realidad*. México: Trillas.

Tabla 2: Relaciones[36] de base, a partir de las cuales es posible engendrar los problemas de adición y sustracción de la aritmética ordinaria, que forman parte del campo conceptual de las estructuras aditivas:



1. Composición de dos medidas en una tercera

Pablo tiene 6 canicas de vidrio y 8 de acero. En total tiene 14 canicas.

Ecuación: 6 + 8 = 14

2. Transformación (cuantificada) de una medida inicial en una medida final

Pablo tenía 7 canicas antes de comenzar a jugar. Ganó 4 canicas. Ahora tiene 11.

Ecuación: 7 + (+4) = 11

3. Relación (cuantificada) de comparación entre dos medidas

Pablo tiene 8 canicas. Jaime 5 menos; entonces tiene 3.

Ecuación: 8 + (-5) = 3

4. Composición de dos transformaciones

Pablo ganó 6 canicas ayer y hoy perdió 9. En total perdió 3.

Ecuación: (+6) + (-9) = (-3)

5. Transformación de una relación

Pablo le debía 6 canicas a Enrique. Le devuelve 4. Sólo le debe 2.

Ecuación: (-6) + (+4) = (-2)

6. Composición de dos relaciones

Pablo le debe 6 canicas a Enrique, pero Enrique le debe 4. Pablo le debe entonces sólo 2 canicas a Enrique.

Ecuación: (-6) + (+4) = (-2)

«Allí donde el matemático puede ver la adición como una ley binaria de composición interna, el didacta debe ver toda una serie de situaciones ligadas a esta operación, diferentemente tratadas y percibidas por los alumnos.» (Vergnaud, 1995, p. 184).

[36] En los esquemas siguientes ❑ representa un elemento de $\mathbb{N}$ (o de $\mathbb{D}^+$), es decir una medida, y ❍ un elemento de $\mathbb{Z}$ (o de $\mathbb{D}$) que corresponde a una transformación o a una relación (positiva o negativa). Esto permite distinguir entre las medidas (jamás negativas), representadas por cuadrados y las transformaciones o relaciones (positivas o negativas), representadas por redondeles en cuyo interior el número está siempre precedido de un signo positivo o negativo.

Actividad 22: Para cada una de las seis relaciones de base descritas en la tabla **2**, construya tres problemas escolares diferentes, situando la incógnita, respectivamente, en el lugar de **a**, **b** o **c** en la ecuación: **a + b = c**

Cuando los alumnos aborden la resolución de cada una de las clases de problemas, así distinguidas, tienen que poner en funcionamiento operaciones de pensamiento específicas, ya que, para ellos, son realmente problemas distintos unos de otros. Para cada tipo de problemas emplean uno o muchos *conceptos-en-acto* y *teoremas-en-acto* sin necesidad de explicitarlos. La comprensión progresiva de las estructuras aditivas pasa así por un gran número de pequeñas etapas que podemos caracterizar por medio de *invariantes operatorios* de diferentes niveles.

Estos invariantes comienzan siendo muy «modestos» y simples. Por ejemplo, algunos de los *conceptos* constitutivos de las estructuras aditivas son: cardinal y medida, transformación temporal por aumento o disminución (perder o ganar), relación de comparación cuantificada (tener 3 bombones más que o 3 años más que), composición binaria de medidas (3 manzanas y 4 manzanas son 7 manzanas), composición de relaciones, inversión, número natural o número relativo, de abscisa, desplazamiento orientado, cantidad...

Los *conceptos* anteriores no van solos, no tendrían apenas efecto si *teoremas* verdaderos, como los que siguen, no le dieran su función en el tratamiento de las situaciones:

- $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$, si $A \cap B = \phi$
- Si $A \subset B \Rightarrow \text{Card}(A) < \text{Card}(B)$
- Una cantidad de elementos se conserva aunque cambie la posición espacial de sus elementos (conservación de cantidades discretas).
- El cardinal de una colección es independiente del orden en el que se cuentan sus elementos.
- En una relación: estado–transformación–estado, el estado final es el resultado de aplicar la transformación dada al estado inicial.
- En una relación: estado–transformación–estado, el estado inicial es el resultado de aplicar al estado final la transformación inversa de la dada.
- ...

El campo conceptual de las estructuras aditivas es a la vez el conjunto de situaciones cuyo tratamiento implica una o más adiciones y/o sustracciones, y el conjunto de *conceptos* y *teoremas* que permiten analizar y resolver estas situaciones como tareas matemáticas. Las situaciones y las redes organizadas de *conceptos* y *teoremas* se forman y se desarrollan conjuntamente, en estrecha relación en el campo conceptual.

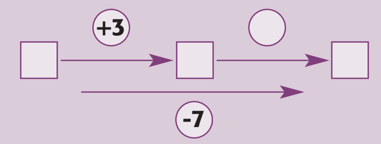
Actividad 23: Determine la estructura del siguiente problema aritmético y construya un esquema que represente las transformaciones y relaciones establecidas entre sus datos.

Carlota ha jugado dos partidas de canicas. En la segunda partida, pierde 8 canicas. Ha olvidado lo que le ocurrió en la primera partida. Recuenta sus canicas y observa que tiene 3 canicas menos que cuando comenzó a jugar la primera partida. ¿Qué ocurrió en la primera partida?

- Determine los invariantes operatorios con los que los alumnos pueden abordar su solución.

En el estudio de los campos conceptuales, el análisis de las representaciones simbólicas es de suma importancia, ya que permite explicar y describir los conceptos, así como las relaciones propias de cada situación, constituyendo, además, una valiosa herramienta para la resolución de problemas complejos.

Actividad 24: Dada la siguiente representación simbólica, redacte un problema escolar que se ajuste a ella y determine la categoría a la que pertenece:



Determine varios invariantes operatorios que deben emplear los alumnos en su resolución, distinguiendo entre *conceptos-en-acto* y *teoremas-en-acto.*

BIBLIOGRAFÍA

Bosch, M., Chevallard, Y., Gascón, J. (1997): *Estudiar Matemáticas.* Barcelona: ICE-Horsori.

Briand, J., Chevalier, M.C. (1995): *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques.* París: Hatier.

Chamorro, M.C. (1991): *El aprendizaje significativo en el área de las matemáticas.* Madrid: Alhambra-Logman.

Ermel (1991): *Apprentissages numériques.* París: Hatier.

Henry, M. (1995): *Une presentation de la didactique en vue de la formation des enseignants.* Besançon. IREM.

Vergnaud, G. (1991): *El niño, la matemática y la realidad*. México: Trillas.

CAPÍTULO 3

Herramientas de análisis en didáctica de las matemáticas

ÍNDICE

M.ª del Carmen Chamorro

1. Introducción

La escuela constituye una realidad compleja, en ella intervienen muchos elementos, algunos bajo el control de la propia institución escolar, otros del maestro, aunque muchos aspectos escapan de su control (programas, horarios, organización, etc.). Dentro de esa realidad compleja, afrontar la enseñanza de las matemáticas en el nivel de la Educación Primaria es una tarea a la que el maestro no puede, ni debe, enfrentarse sin otras herramientas que la mera intuición o el recurso a sus experiencias y vivencias escolares, confiando en su *arte personal* para enseñar.

El elevado fracaso que se constata en el aprendizaje de las matemáticas tiene raíces muy profundas y una pluralidad de causas de diferente naturaleza; raíces ligadas tanto a la dificultad y abstracción de algunos conceptos matemáticos como a la deficiente enseñanza que a menudo se hace en la escuela, y que tiene mucho que ver con el frecuente desconocimiento de los procesos de aprendizaje de las matemáticas y de sus técnicas específicas de enseñanza.

La mayoría de los conceptos que se enseñan en la escuela Primaria son conocidos y dominados por cualquier ciudadano con una cultura media, de ahí la falsa idea de que toda persona, sin una formación específica, siempre que domine los conocimientos matemáticos correspondientes puede enseñar matemáticas en el nivel primario. Los que así piensan tienen concepciones sobre el aprendizaje de las matemáticas que no se corresponden con lo que las investigaciones han probado sobradamente. Y así, sabemos que los conceptos no se copian, se construyen en interacción con el medio, que todos los individuos no usan las mismas estrategias para aprender, que los errores no se corrigen simplemente porque el maestro los señale, que la repetición no lleva necesariamente a la comprensión, que los conceptos matemáticos no son independientes los unos de los otros, y que se encuentran formando campos conceptuales, etc.

Por otra parte, sabemos también que en la enseñanza de las matemáticas se producen hechos y fenómenos que tienen una cierta regularidad y que son específicos de un conocimiento dado, por lo que deben ser conocidos por el futuro profesor, que ha de saber interpretar, reconocer y valorar dentro de su grupo específico de clase.

Si lo anterior es cierto, es necesario que el futuro profesor disponga, en tanto que profesional de la enseñanza, de herramientas y técnicas profesionales que le permitan abordar la enseñanza de las matemáticas con cierta garantía, alejándole de la visión ingenua que muchos sectores de nuestra sociedad tienen de su enseñanza.

Todo profesional debe conocer el utillaje y la práctica de su oficio. Nadie en su sano juicio practicaría hoy una medicina intuitiva que no usara las técnicas y aparatos de diagnóstico disponibles, sería inmediatamente excluido de la profesión. ¿Puede un profesor desconocer los resultados más relevantes relativos al oficio de enseñar matemáticas?

Tampoco se aprende a ser profesor imitando o copiando un modelo, no basta con observar a un buen profesor para aprender a ser profesor. Incluso para observar con provecho se necesita disponer de herramientas conceptuales, hay que saber qué observar y cómo para superar visiones naturalistas del comportamiento del profesor y de los alumnos. El ojo del radiólogo ve lo que otros no ven en una radiografía, es un ojo entrenado que sabe lo que debe buscar. El maestro encuentra la interpretación de lo que pasa en el aula, por ejemplo de los errores cometidos por los alumnos al resolver un problema, a partir de muchos conocimientos de los que dispone: el tipo de problema, la redacción y legibilidad del enunciado, los datos ausentes o sobrantes, el momento del curso, las operaciones que intervienen, los conceptos subyacentes, la historia de la clase y del alumno en particular, y con todo ello elabora un diagnóstico que va mucho más allá de un bien o un mal en un problema.

La Didáctica de las Matemáticas es, hoy en día, una disciplina científica que dispone de resultados sólidamente probados, de conceptos y herramientas de diagnóstico, análisis y tratamiento de los problemas que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas en el contexto escolar. El objetivo de este capítulo es el de proporcionar al futuro maestro algunos de estos conceptos, haciéndole ver su pertinencia y utilidad en relación con el trabajo que habrá de realizar en la escuela.

2. Objetivos

- Conocer los elementos teóricos más importantes de modelización del sistema didáctico.
- Distinguir entre situaciones a-didácticas, didácticas y no didácticas.
- Identificar los distintos tipos de situaciones a-didácticas: acción, formulación y validación.
- Saber determinar las variables didácticas de una situación y las estrategias asociadas.
- Identificar posibles efectos del contrato didáctico.
- Conocer los diferentes elementos e instituciones que intervienen y determinan la transposición didáctica.

3. La relación didáctica

No es posible concebir el proceso de enseñanza-aprendizaje sin sus actores:

– *El alumno*, que debe aprender aquello que previamente ha sido establecido socialmente, según su edad, nivel y tipo de estudios, y que la institución escolar toma como proyecto a desarrollar.

– *El saber*, en nuestro caso las matemáticas, que deben ser transmitidas como patrimonio a las nuevas generaciones, el objeto de aprendizaje.

– *El profesor*, encargado por la sociedad y la institución de llevar a cabo el proyecto de enseñanza, de hacer funcionar todo el sistema.

En el proceso de enseñanza se producen múltiples interacciones en el sistema didáctico, entre estos tres polos. La didáctica de las matemáticas va a modelizar y estudiar las interacciones en los tres subsistemas: profesor-alumno, alumno-saber, profesor-saber.

En la figura que sigue, se detallan algunos de los objetos de estudio de cada uno de esos subsistemas:

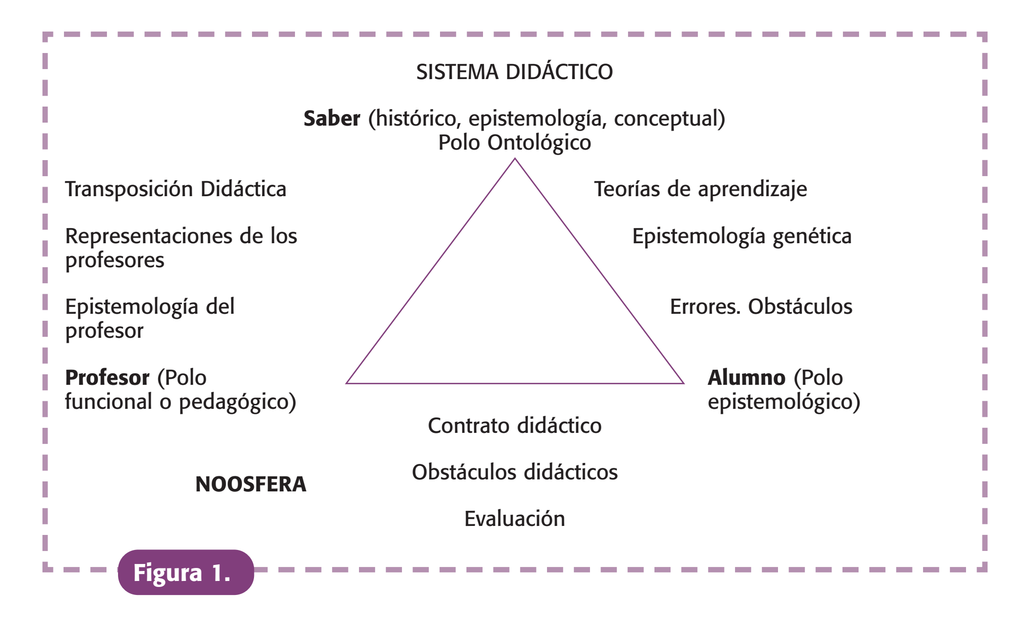


Figura 1.

4. El aprendizaje a través de las situaciones didácticas

En al capítulo anterior se ha indagado sobre los procesos propios de aprendizaje de las matemáticas, caracterizando la construcción de los conceptos matemáticos. En particular, se ha visto que un concepto no puede ser aprendido a partir de una sola clase de situaciones, y que se requiere tratar todas aquellas situaciones en las que el concepto interviene, las que le dan sentido. El aprendizaje se produce por adaptación al medio y la situación juega el papel de medio

con el que el alumno interactúa, de ahí la importancia de caracterizar y modelizar qué es y cómo funciona una situación didáctica.

La noción de situación didáctica va más allá de la idea de mera actividad práctica. Una situación busca que el alumno construya con sentido un conocimiento matemático, y nada mejor para ello que dicho conocimiento aparezca a los ojos del alumno como la solución óptima del problema a resolver.

Tomemos como ejemplo una situación clásica: *«el alumno debe traer el número necesario de cucharillas para todas y cada una de las tazas que hay en una mesa»*, que suele ser presentada al alumno como un juego al que acepta jugar gustosamente, no porque sepa que con ello puede adquirir un aprendizaje matemático (objetivo del profesor), sino porque simplemente le divierte y le interesa, produciéndose entonces **la devolución.**

Si la situación no evoluciona de alguna manera, y sólo el profesor puede hacerla evolucionar, el niño puede resolver la tarea haciendo uso únicamente de la correspondencia término a término, que funciona como estrategia de base: va al lugar donde están las cucharillas y coge un montón, si después de poner una en cada taza le sobran unas cucharillas, las devuelve, y si le faltan vuelve a por más, y así hasta completar la tarea. Si lo que deseamos es que aparezcan estrategias más potentes, matemáticamente hablando, la situación debe modificarse, de manera que la estrategia de base usada, la correspondencia biyectiva, fracase.

Imponemos ahora una nueva condición: que se traigan en un solo viaje. Ahora la correspondencia término a término puede permitir ocasionalmente, al azar, resolver bien la tarea, pero en la gran mayoría de los casos va a provocar un fracaso, se traerán cucharillas de más o por el contrario faltarán, de manera que el alumno se ve obligado a buscar otro método que le permita ganar a la primera. Puede acudir, por ejemplo, a copiar la configuración espacial de las tazas y tratar de reproducirla con las cucharillas como si se tratara de un dibujo; si éste fuera el caso, el maestro debe colocar las tazas de manera difícilmente copiable, obstaculizando que tal estrategia tenga éxito. Igualmente, si el número de tazas es muy pequeño y forma parte de las cantidades intuitivas (normalmente hasta 4 y más si se encuentran formando una configuración geométrica como en un dado), el alumno puede reconocer la cantidad sin necesidad de contar; en este caso bastará con aumentar el número de tazas para hacer fracasar esta estrategia.

Ahora, cualquier estrategia ganadora tiene que pasar inevitablemente por el conteo, por el uso del número, por el reconocimiento de que el número permite memorizar una cantidad en ausencia de ésta. El alumno está en condiciones de descubrir que la única estrategia que es siempre ganadora es la que consiste en usar el número como memoria de la cantidad; que es justamente el concepto matemático que el profesor buscaba que el alumno construyese con esta situación.

Si analizamos la situación anterior, podemos distinguir que ciertos cambios en la misma, que denominaremos variables didácticas (disposición de las tazas, cantidad de tazas, número de viajes), llevan aparejado en cada asignación de

valor el cambio de estrategia por parte del alumno; además, la estrategia óptima coincide con el conocimiento que se quiere que el alumno construya, con el objeto de la situación: contar para memorizar una cantidad y poder reproducirla en su ausencia. Por otra parte, el alumno sabe, sin necesidad de la sanción del profesor, si el procedimiento usado es correcto o no, ya que la propia situación le informa sobre ello, hay una validación interna de la estrategia usada.

Lo que vamos a denominar aprendizaje va a consistir, y va a mostrarse, en el cambio de *estrategia,* lo que implica el cambio de los conocimientos que le están asociados y la aparición de un conocimiento específico como resultado del cambio. Este aprendizaje lleva aparejada una modificación de la relación con el conocimiento objeto de la relación, por parte del alumno, que el maestro consigue a través de la gestión de las *variables didácticas* de la situación.

Una hipótesis didáctica importante es que un medio sin intenciones didácticas, es decir no organizado expresamente para enseñar un saber, es insuficiente para inducir en el alumno los conocimientos que la sociedad desea que adquiera. Así, el enseñante debe producir las adaptaciones deseadas, y ello a través de la elección reflexiva y justificada de las situaciones didácticas que someterá al alumno, en las que éste pueda construir su relación con el objeto de conocimiento, o bien modificarla, como respuesta a las exigencias del medio, y no como respuesta al deseo del enseñante explicitado en el contrato didáctico.

Las situaciones de este tipo reciben el nombre de *situaciones a-didácticas*, y vienen caracterizadas por el hecho de que las acciones del alumno tienen un carácter de necesidad en relación con el saber en juego, al margen de los presupuestos didácticos y la intencionalidad didáctica y de aprendizaje que el maestro les haya dado.

En los capítulos 9 y 10 encontrará el lector un gran número de situaciones a-didácticas que han sido específicamente diseñadas para que el alumno aprenda conceptos determinados, longitud y superficie en este caso.

No toda situación didáctica es evidentemente a-didáctica. El alumno no tiene necesidad de aprender todo de forma a-didáctica, muchos conocimientos pueden ser comprendidos por el alumno sin necesidad de descubrirlos personalmente, a través de una enseñanza directa por parte del profesor.

Son condiciones indispensables para que la situación sea a-didáctica las siguientes:

– El alumno debe poder entrever una respuesta al problema planteado (debe tener los conocimientos mínimos que le permitan comprender cuál es el desafío de la situación).
– La estrategia de base debe mostrarse rápidamente como insuficiente (de lo contrario no se produciría una evolución hacia la estrategia óptima que se busca).
– Debe existir un medio de validación de las estrategias (la propia situación, sin la intervención de la maestra, debe decir al alumno si su estrategia es o no válida para resolver el problema propuesto).
– Debe existir incertidumbre, por parte del alumno, en las decisiones a tomar (el alumno no sabe de antemano si el procedimiento que va a usar dará resultado, tiene que probarlo para saberlo).

- El medio debe permitir retroacciones (la información sobre el resultado de sus acciones debe venir de la propia situación, no del maestro).
- La situación debe ser repetible (debe poder repetirse varias veces sin que se desvele cuál es el procedimiento adecuado, de lo contrario el alumno estaría obligado a aprender a la primera, no habría espacio para el error).
- El conocimiento buscado debe aparecer como el necesario para pasar de la estrategia de base a la estrategia óptima.

Condiciones que el maestro debe verificar en lo que se llama el análisis a priori de la situación.

En el ejemplo anterior, el niño tiene algún conocimiento con el que actuar, sabe emparejar y puede empezar usando este método para entrar en la situación, que conecta, por tanto, con sus conocimientos previos. La estrategia de base, la correspondencia, fracasa rápidamente en cuanto se impone la condición de un solo viaje, se muestra ineficaz e insuficiente. Cada estrategia probada es sancionada por las retroacciones de la situación, y el alumno sabe si la estrategia usada funciona o no, si bien no tiene certeza de ello hasta que no la pone en marcha (de lo contrario el alumno poseería ya los conocimientos objeto de aprendizaje de la situación). La situación es repetible, de manera que el alumno pueda hacer nuevos ensayos probando nuevas estrategias. El éxito se produce cada vez que el alumno usa la estrategia óptima, contar, estrategia demandada por la situación.

Desde el punto de vista del alumno, la situación es a-didáctica sólo si él tiene conciencia de implicarse, no por razones ligadas al contrato didáctico, porque el profesor lo manda, sino al razonamiento matemático únicamente. Lo que llamamos el *análisis a priori* de la situación busca determinar si una situación puede ser vivida como a-didáctica por el alumno, buscando las condiciones necesarias para ello, y analizando si la situación puede desarrollarse y produce una relación matemática del alumno con su problema.

Una situación es no didáctica si nadie la ha organizado para permitir un aprendizaje, por ejemplo, un problema que aparece de forma natural en la vida profesional o familiar. En ella no hay maestro ni alumno, no ha sido diseñada para que alguien aprenda algo.

Una situación didáctica es una situación que se lleva a cabo normalmente en la clase, entre un maestro y uno o varios alumnos, alrededor de un saber a enseñar. En una situación didáctica las intenciones de enseñar y aprender se manifiestan públicamente; está regida por el contrato didáctico.

Es evidente que una situación no didáctica puede que sea simultáneamente a-didáctica (por ejemplo se nos estropea un aparato, lo desmontamos y tratamos de averiguar qué pasa, hacemos varias tentativas y supuestos que, a veces, nos permiten arreglarlo), pero una situación didáctica no tiene por qué ser vivida como a-didáctica (por ejemplo el aprendizaje de un algoritmo de memoria, que no comprendemos), si bien el profesor de matemáticas espera siempre alguna fase

a-didáctica cuando plantea un problema de matemáticas a sus alumnos, ya que espera que, al menos en parte, lo resuelvan como matemáticos, implicándose en la búsqueda de la solución.

Para que un alumno pueda percibir una situación como a-didáctica es necesario que haya una construcción epistemológica cognitiva intencional, el alumno es entonces el responsable de la resolución del problema que le plantea la situación, y a él corresponde encontrar una solución. Se requiere pues que el alumno acepte el problema como *su* problema, que entre dentro de sus proyectos, y para ello no basta con comunicárselo. El alumno debe implicarse en la situación, entrar en el juego, y ello sin que le interese o le mueva lo que va a aprender con ella, lo que el maestro quiere que aprenda. La acción mediante la que el profesor busca esta aceptación por parte del alumno recibe el nombre de *devolución*. Los procesos de devolución tienen por objeto convertir el saber a enseñar en conocimientos personalizados, contextualizados y temporalizados del alumno, y requieren que el profesor contextualice y personalice el saber a enseñar[1], buscando problemas y situaciones que permitan al alumno construir el sentido de la noción objeto de enseñanza, de manera que su actividad se asemeje a la del matemático.

Actividad 1: Explicar por qué en la situación descrita de las tazas y las cucharillas, el conocimiento buscado, contar, tiene carácter de necesidad y no depende del contrato didáctico. ¿Por qué se produce la devolución en dicha situación?

La situación descrita, ¿es a-didáctica, no didáctica, ambas cosas?

Buscar un ejemplo de situación no didáctica que sea simultáneamente a-didáctica, y otro de una situación didáctica que no sea a-didáctica.

4.1. Los distintos tipos de situaciones

Guy Brousseau, autor de la Teoría de Situaciones[2], establece una tipología de las situaciones didácticas, clasificándolas en situaciones de *acción*, *formulación y validación*, a las que añade posteriormente las de *institucionalización*, en un deseo de modelizar todas las posibilidades:

– El alumno se envía un mensaje a sí mismo **(situación de acción)** a través de los ensayos y errores que hace para resolver el problema.

  En la situación de las cucharillas y las tazas, el alumno debe actuar para resolver la situación, hacer distintos ensayos, desplazarse hasta donde están las cucharillas, colocarlas de una en una, etc.

[1] Véase más adelante el apartado 5, dedicado a la transposición didáctica.

[2] BROUSSEAU, G. (1994): *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

– El alumno intercambia información con uno o varios interlocutores, el maestro puede ser uno de ellos, los dos pueden ser alumnos o grupos de alumnos (**situaciones de formulación**[3]).

  Si modificamos la situación anterior como sigue, estaríamos ante una situación de formulación: un alumno que tiene delante la colección de tazas, debe mandar un mensaje a otro alumno, que no ve las tazas para que traiga tantas cucharillas como sea necesario para que tengamos una por cada taza. Ahora hay un emisor que envía un mensaje y un receptor que debe interpretarlo.

– El alumno debe justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha, elaborar la verificación o prueba semántica que justifica el uso del modelo para tratar la situación (**situaciones de validación**). La eficacia de cada estrategia depende de la situación precisa, pudiendo resultar óptima en algunos casos e ineficaz en otros. Este tipo de situaciones son muy abundantes en matemáticas y ello porque la naturaleza del trabajo matemático y del método científico, en general, requiere constantemente de la prueba.

Cuando el alumno trae las cucharillas debe verificar que no le faltan, pero que tampoco le sobran. Cuando el alumno puede hacer varios viajes, la estrategia de la correspondencia término a término puede ser óptima, pero se convierte en estrategia perdedora cuando sólo se puede hacer un viaje.

En la dialéctica de la acción, ligada a las situaciones del mismo nombre, el alumno formula, prevé y explica la situación, organizando sus estrategias a fin de construir una representación de la situación que le sirva de modelo y le ayude a tomar decisiones. Las retroacciones proporcionadas por el medio funcionan como sanciones positivas o negativas, según el caso, de sus acciones, lo que permite al sujeto adaptarlas a efectos de aceptar o rechazar una hipótesis, o escoger entre varias soluciones. Cada estrategia lleva asociados una serie de conocimientos específicos, diferentes de una a otra, y portadoras en ocasiones de concepciones diferentes.

En las situaciones de formulación el alumno intercambia con una o varias personas informaciones, comunica lo que ha encontrado a su interlocutor o interlocutores, que a su vez le hacen llegar información. Esta comunicación de mensajes, muy específicos a veces, puede llevar aparejadas asimilaciones y también contradicciones. Las interacciones entre emisores y receptores pueden producirse a través de acciones y decisiones que no van acompañadas de un código o un lenguaje, o bien a través del lenguaje o de un código que las acompaña, pudiendo tratarse tan sólo de un intercambio de juicios. El fracaso de un mensaje obliga al interlocutor a su revisión, y pone muchas veces en tela de juicio el procedimiento empleado para su obtención, de forma que la sanción en forma

[3] En el capítulo 9 encontrará numerosas situaciones de formulación y validación dentro de la ingeniería didáctica que se propone para la enseñanza de la longitud.

de fracaso reenvía a la revisión de la acción. Como resultado de la dialéctica de la formulación, los alumnos van a crear un modelo explícito que pueda ser formulado con ayuda de signos y reglas, conocidas o nuevas.

La situación que sigue, diseñada para trabajar la longitud con alumnos de 3º de Educación Primaria, es una situación de formulación:

- *ORGANIZACIÓN DE LA CLASE:* En grupos de dos. La mitad son grupos A y la otra mitad B. Cada grupo es a la vez emisor y receptor. Cada A_i se corresponde con el B_i.
- *MATERIAL:* Dos bandas de cartulina, una roja y la otra azul, las mismas de la actividad precedente (la banda roja mide 50 cm, y la banda azul 4 cm). Estas dos bandas se distribuyen sólo a los niños que lo piden durante el desarrollo de la actividad.

  Una banda de longitud múltiplo de la banda azul, banda de la que hay que enviar la medida, amarilla para los grupos A = 32 cm (8 veces el patrón azul), verde para los grupos B = 28 cm (7 veces el patrón azul).

  Una hoja para transcribir y enviar el mensaje.

  Dos bandas de papel blanco, de longitud superior a 32 cm, para recortar en ellas las bandas correspondientes al mensaje.
- *DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD:* El maestro distribuye el material a los alumnos. Da a los grupos A una banda amarilla, y a los grupos B una banda verde. A continuación, distribuye la hoja para el mensaje.

Se trata, en una primera fase, de enviar un mensaje escrito al otro grupo, que permita reproducir una banda de la misma longitud que la recibida. En una segunda fase, hay que fabricar la banda correspondiente al mensaje recibido del grupo correspondiente.

- *CONSIGNA:* «Cada grupo tiene delante una banda amarilla o verde. Cada grupo deberá escribir un mensaje que permita al grupo correspondiente, fabricar una banda de la misma longitud que la suya».

  «Cuando un grupo haya escrito su mensaje, lo enviará a través de mí, yo seré el mensajero, a sus correspondientes receptores. Al mismo tiempo que el mensaje, recibiréis una banda de papel blanco en la que recortaréis la banda correspondiente al mensaje».

  «Cuando las bandas estén fabricadas, vendréis a verificar que tienen la misma longitud que la amarilla y la verde respectivamente. Éste es el error máximo permitido (muestra un pedacito de cartulina de 5 mm de longitud)».

En la situación descrita los alumnos comienzan elaborando mensajes del tipo:

- «Tienes lápiz, goma y pinturas, fabrica una cinta del color que tú quieras».
- «Tienen que hacer una banda como la que tenemos, que sea verde, fina y alargada».
- «La banda tiene dos tijeras de clase, con las que recortamos, y una banda azul pequeñita como la que nos han dado antes».
- «Nuestra banda es muy larga, y si la doblas coinciden los dos lados».

Todos estos mensajes pretenden, aunque erróneamente, comunicar la longitud de la banda, al grupo que no la ve pero que debe reproducirla. Es la comunicación entre ambos grupos, y sobre todo la posterior comparación entre la

banda original y la construida, la que va a determinar si el mensaje es válido o no. Las quejas de los alumnos que reciben mensajes no válidos para construir la banda sirven para que el grupo emisor tome nota sobre qué procedimientos son inadecuados, y entrever otros distintos. En la puesta en común se ve que los grupos ganadores han emitido mensajes en los que se usan patrones:

- «Para construir la banda con 7 azules».
- «Coges 8 bandas azules y las pones en la banda blanca».

Como puede verse en la situación anterior, las condiciones para que una situación de formulación funcione son:

- Que haya necesidad de comunicación entre alumnos cooperantes (hay que enviar un mensaje).
- Que las posiciones de los alumnos sean asimétricas en lo que se refiere a los medios de acción sobre el medio o las informaciones (unos ven la banda a reproducir, otros no).
- Que el medio permita retroacciones para la acción, con el receptor del mensaje (los alumnos discuten sobre los mensajes, comprueban si la banda construida coincide con la inicial, no necesitan al maestro para saber si el mensaje funciona).

La validación tiene como objeto poner de manifiesto las pruebas empíricas o implícitas que han funcionado en el ámbito de la acción o con motivo de la formulación.

En la situación que se acaba de describir, la validación corre a cargo de los alumnos, son ellos los que deciden si un mensaje es ganador o no, y ello en función de si éste ha permitido construir, al equipo receptor, una banda de la misma longitud que la que tienen los emisores.

En una situación de validación el medio está organizado específicamente, de manera que el alumno debe hacer declaraciones que se someterán al juicio de su interlocutor; éste debe protestar, rechazar una justificación que él considere falsa, y probar a su vez sus afirmaciones. Los dos deben encontrarse en posiciones simétricas, tanto desde el punto de vista de la información como de los medios de retroacciones. La discusión no debe desligarse de la situación, para evitar así que el discurso se aleje de la lógica y la eficacia de las pruebas para caer por ejemplo en la autoridad de quien lo dice, el sofisma o la retórica[4]. Dice Brousseau a este respecto:

«En matemáticas el *porqué* no puede ser aprendido solamente por referencia a la autoridad del adulto. La verdad no puede ser la conformidad a la regla, a la convención social, como lo *bello* o lo *bueno*. Exige una adhesión, una convicción personal, una interiorización que por esencia no puede ser recibida de otro sin perder justamente su valor. Pensamos que empieza a construirse en una génesis,

[4] Los alumnos de Primaria tienen tendencia a admitir como válidos resultados falsos que provienen de alumnos que gozan de prestigio, bien porque son considerados como buenos alumnos, o porque son líderes del grupo, de ahí la importancia de separar los procesos de validación del principio de autoridad, ya sea del maestro o de un alumno.

de la que Piaget ha mostrado lo esencial, pero que implica también relaciones específicas con el medio, en particular en la escolaridad. Consideramos pues que hacer matemáticas es, en primer lugar, para el niño, una actividad social y no únicamente individual.»[5]

El maestro no tiene a priori la garantía de que la fase de validación va a conducir a los alumnos a conclusiones aceptables para él, de ahí que la situación de validación busque tan sólo la garantía de que los alumnos tendrán la oportunidad de entablar un proceso de prueba.

El interés de las situaciones de validación reside en que ponen en juego reglas de debate que tienen un estatuto paramatemático.

Para que haya una situación de validación se requiere:

- Que haya necesidad de comunicación entre alumnos oponentes (proponente y oponente).
- Que las posiciones de los alumnos sean simétricas en relación con los medios de acción sobre el medio y las informaciones.
- Que el medio permita retroacciones a través de la acción (mensajes) y con el juicio del interlocutor.

Las interacciones con el medio son los mensajes intercambiados: afirmaciones, teoremas, demostraciones, etc.

En la situación descrita, los alumnos tienen necesidad de verificar si la banda construida con el mensaje recibido coincide con la inicial. Unos tienen la banda inicial, otros la construida. La superposición de bandas proporciona información sobre si el mensaje es o no válido, y estas retroacciones son suficientes para decidir sobre la validación, sin necesidad de recurrir a la autoridad del maestro o a cualquier otra.

Actividad 2: Explicar por qué en la situación anterior, la validación viene de las retroacciones con el medio y no de la autoridad del maestro. ¿Qué papel juega éste en la validación?

Cuando el alumno ha encontrado la solución al problema planteado, desconoce que tal solución constituye un conocimiento matemático que puede ser reutilizado con éxito en otras situaciones y ocasiones. Sus respuestas deben ser transformadas, mediante un proceso de redescontextualización y redespersonalización, para que esos conocimientos puedan ser convertidos en saberes, integrados y constitutivos del *saber a enseñar*, reconociendo en ellos un saber cultural reutilizable, con un carácter universal. Estos procesos, a cargo del profesor, bajo su responsabilidad, tienen como objeto cambiar el estatuto de los conocimientos y constituyen las llamadas *situaciones de institucionalización*.

[5] Brousseau, G. (1976): «*Étude local des processus d'acquisition en situations scolaires*», Barcelona, p. 12.

4.2. La ingeniería didáctica

En todo caso, antes de enfrentar al alumno con una situación didáctica, el maestro debe realizar lo que se denomina el análisis a priori de la situación, que no consiste en otra cosa que en dar respuesta a ciertas preguntas, que buscan garantizar que la situación ha sido bien construida y que por tanto puede funcionar. Además, debe hacerse otras preguntas[6] para estar seguro de que no ha habido un deslizamiento epistemológico que banalice los conceptos, y que la situación permitirá al alumno la construcción del sentido:

- ¿Hasta dónde transformar el saber-sabio?
- ¿Qué adquisiciones previas del sujeto son necesarias?
- ¿Cuál es la naturaleza del saber adquirido?
- ¿Qué sentido toma para el alumno?
- ¿Le permite adaptarse a las situaciones?
- ¿Le permite resolver problemas?
- ¿Modifica su visión del mundo?

El diseño de situaciones didácticas según las condiciones que han sido enunciadas y analizadas, y la organización de las mismas en una progresión articulada en el tiempo con vistas a enseñar un cierto concepto a una clase de alumnos de un determinado nivel, es el objeto de lo que se denomina *ingeniería didáctica*. Su nombre evoca la necesidad de controlar herramientas profesionales, al igual que el ingeniero, para producir secuencias de aprendizaje con ciertas garantías de éxito. Herramientas necesarias, entre otras, son: la epistemología e historia del saber matemático objeto de enseñanza, el conocimiento de la transposición didáctica clásica que se ha hecho de ese concepto, las concepciones de los alumnos sobre el concepto en cuestión, los obstáculos, errores y fenómenos didácticos conocidos, la epistemología genética, las relaciones que ese concepto mantiene con otros, etc. Como puede apreciarse, un abanico de útiles, nada triviales, que un profesional tiene que conocer y controlar para ser eficaz en su trabajo como enseñante.

La ingeniería didáctica permite construir lo que se denomina *génesis artificial de un saber*, que no necesariamente coincide con la génesis histórica del concepto tratado. En esta génesis artificial se busca el camino más rápido y seguro para que el alumno construya con sentido un concepto matemático, evitando los retrocesos y parones que históricamente hayan podido producirse, y reordenando los procesos de construcción de ese saber de acuerdo con pautas didácticas, haciendo su transposición didáctica de manera lo más rigurosa posible, desde un punto de vista epistemológico.

---

[6] Tomadas de LEGRAND, M.: *Cours École d'été de Didactique des Mathématiques,* Saint Sauves, septiembre 1993.

Los objetivos de las ingenierías didácticas pueden ser muy variados, destacando el estudio de los procesos de aprendizaje de un concepto determinado, la elaboración de génesis artificiales de un saber concreto o estudios de tipo transversal (por ejemplo, la resolución de problemas, el aprendizaje de la demostración, el debate científico, etc.). Se acostumbra también a hablar de micro y macro-ingenierías; el primer término hace referencia a estudios de tipo local, de amplitud limitada, en tanto que el segundo se refiere a procesos de varios años de duración, que pueden englobar varios conceptos relacionados entre sí, que se interesan por ejemplo por la articulación de distintos conocimientos o estrategias globales de aprendizaje.

5. La transposición didáctica

Aunque implícitamente hemos usado desde el comienzo términos acuñados por Chevallard en su exposición de la transposición didáctica, su importancia dentro de la modelización en didáctica de las matemáticas, requiere de definiciones más precisas y una exposición más detallada.

Se designa con el término **transposición didáctica** el conjunto de transformaciones que sufre un saber a efectos de ser enseñado. Este concepto reenvía pues, de forma inmediata, al paso del saber-sabio[7] al saber-enseñado, lo que indica ya la necesidad de ejercer una vigilancia epistemológica sobre la distancia, necesaria, entre estos dos saberes, vigilancia que corresponde a la didáctica de las matemáticas.

«En esta dirección, la de la vigilancia epistemológica, de distanciamiento del objeto de estudio, el análisis epistemológico permite igualmente al didacta medir las disparidades existentes entre el saber-sabio y el saber-enseñado. Mientras que la escuela vive en la ficción consistente en ver en los objetos de enseñanza copias simplificadas pero fieles de los objetos de la ciencia, el análisis epistemológico permite comprender lo que gobierna la evolución del conocimiento científico, nos ayuda a tomar conciencia de la distancia que separa las economías de los dos sistemas».[8]

Los fenómenos propios de esta transposición didáctica han permanecido durante mucho tiempo ocultos, como consecuencia de la tendencia general a negar esa distancia, provocada por las limitaciones que pesan sobre el sistema de enseñanza.

La sociedad demanda del profesor enseñar parte del denominado **saber-sabio**, detentado por los matemáticos profesionales e investigadores, que son sus creadores permanentes, pero este conocimiento no es enseñable directamente, requiere de ciertas modificaciones para poder ser enseñado en un nivel dado, y ello, porque

[7] El saber sabio designa el conjunto de resultados admitidos por verdaderos por la comunidad científica de referencia, los matemáticos en nuestro caso, en tanto que el saber enseñado es la parte de las matemáticas que son enseñadas finalmente, de forma efectiva en un nivel escolar determinado.

[8] ARTIGUE, M.: *Épistémologie et Didactique*, Cahiers de DIDIREM nº 3, junio 1989, Université de París VII, p. 2.

como vamos a ver, las características de unos y otros saberes son bien distintas. El funcionamiento didáctico del saber enseñado es diferente del funcionamiento del saber sabio, hay interrelación pero no identificación, por tanto, cuando elementos del saber-sabio pasan al saber-enseñado se requiere de la transposición didáctica.

Un saber aparece en un momento dado, en una sociedad dada, y ligado a una o varias instituciones. Por ello, Chevallard[9], interesado por la antropología de los saberes, señala que:

– Todo saber es saber de una institución.
– Un mismo saber puede vivir en instituciones diferentes.
– Para que un saber pueda vivir en una institución es necesario que se someta a un cierto número de restricciones, lo que implica sobre todo su modificación, de lo contrario no podría mantenerse en la institución.

Por ejemplo, el saber sabio correspondiente a la medida de magnitudes forma parte del análisis funcional, la teoría de la medida, sin embargo, el saber enseñado en la educación elemental dista mucho, epistemológicamente hablando, de tales conceptos, se enseña una parte muy mínima de ellos, y después de haber sufrido un gran número de reducciones. De la misma manera, las nociones de medida necesarias para un maestro, en la institución Facultad de Educación, son muy diferentes de las que recibe un ingeniero de Caminos en la institución Escuela de Ingeniería o un futuro fresador en la institución Formación Profesional.

Cuando un investigador publica un resultado, por ejemplo en una revista especializada, rara vez nos comunica sus reflexiones iniciales, el problema que dio origen a su investigación y las motivaciones que tuvo, los errores y vías equivocadas que siguió hasta llegar al resultado, etc. Nos comunica, por un deseo de hacer público este saber, un saber *despersonalizado y descontextualizado* de forma que se convierta en algo utilizable por cualquier miembro de la comunidad científica; desaparecen así todas las referencias del contexto del descubrimiento, lo que lleva aparejado una pérdida de sentido para todo aquel que no es experto en el dominio en cuestión.

El saber-sabio en matemáticas se caracteriza por ser[10]:

– Despersonalizado (no sabemos quién lo ha producido).
– Descontextualizado, a nivel de las publicaciones (no sabemos el contexto, el problema que se quería resolver y que dio origen a tal saber).
– Ordenado por los problemas encontrados.
– Sincrético, los saberes están ligados unos a otros a nivel de los investigadores.

---

[9] CHEVALLARD, Y.: «Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel», en Seminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique nº 108, 1989, Grenoble, IMAG, pp. 211-236.

[10] ARSAC, G. *et al.*: *La Transposition Didactique en Mathématiques, en Physique, en Bilologie*, Lyon, Université Claude Bernard, 1989, p.14.

AXIOMAS DE PEANO 213

i) términos primitivos:

un objeto, que se denota con 1
un conjunto $\mathbb{N} \neq \emptyset$
una función, llamada «siguiente» o «sucesor», que se simboliza con «s».

ii) axiomas:

A_1: el objetivo 1 es un elemento de N, es decir

$$1 \in \mathbb{N}$$

A_2: la función siguiente es una aplicación inyectiva de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N} - \{1\}$.

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} - \{1\} \text{ es 1-1}$$

A_3: Principio de inducción completa. Si S es un subconjunto de $\mathbb{N}$ que contiene al 1, y al siguiente de h siempre que contenga a h, entonces $S = \mathbb{N}$. Es decir, si $S \subset \mathbb{N}$ es tal que satisface

$$1 \in S$$
$$h \in S \Rightarrow s(h) \in S, \text{ entonces } S = \mathbb{N}$$

iii) definiciones:

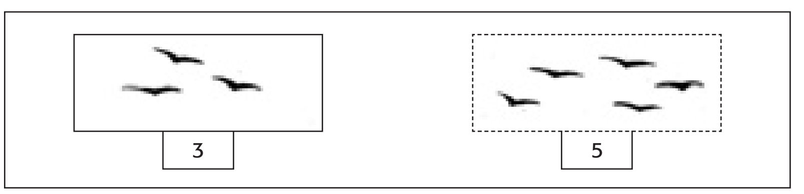
I) de adición

a) $a + 1 = s(a)$ cualquiera que sea $a \in \mathbb{N}$.

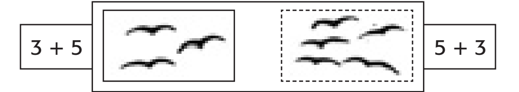
b) $a + s(b) = s(a + b)$ cualesquiera que sean a y b en $\mathbb{N}$.

Figura 2. La transposición didáctica: saber sabio.

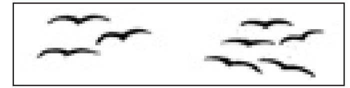
Unimos los dos conjuntos:



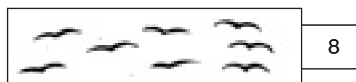
Su número se escribe así:



Borras la línea continua y la de puntos; queda así:



Todos los pájaros
han hecho un solo conjunto.



Por eso dices que 3 + 5 = 5 + 3 = 8.

Figura 3. La transposición didáctica: saber escolar.

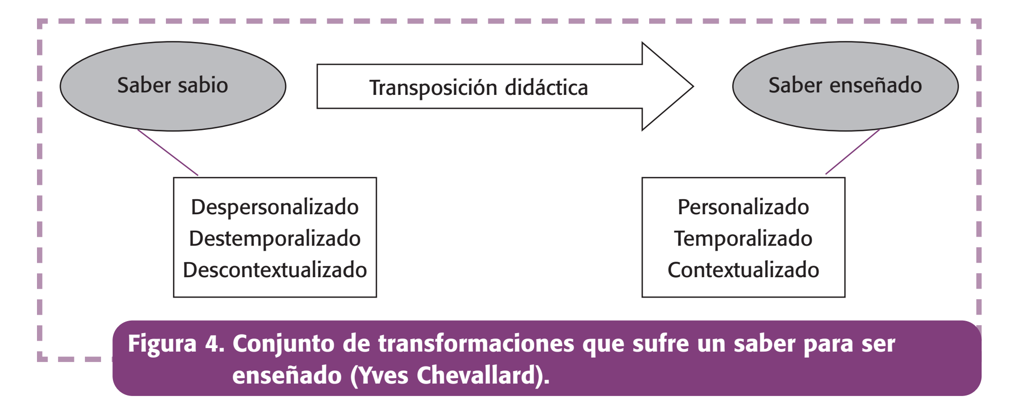


Figura 4. Conjunto de transformaciones que sufre un saber para ser enseñado (Yves Chevallard).

El enseñante, para que el alumno pueda construir el conocimiento correspondiente, debe colocar al alumno delante de una situación cuya resolución, según hemos visto, requiera de la construcción de ese conocimiento, por ello, el profesor debe recontextualizar ese conocimiento y repersonalizarlo (debe aparecer en el proceso personal de resolución del alumno).

Alcanzado este objetivo, para que la resolución descubierta pase a formar parte del saber oficial, necesita ser institucionalizado, lo que requiere según hemos visto un nuevo proceso de despersonalización y descontextualización similar al del investigador, y en un marco artificial creado por el enseñante, lo que hemos venido denominando **génesis artificial del saber**, en contraste con la génesis natural histórica, y que supone en relación a esta segunda un camino más breve hacia el conocimiento. El saber-enseñado tiene pues propiedades muy distintas de las del saber-sabio[11]:

- El saber-enseñado está ordenado en una progresión en el tiempo.
- Es legal, viene definido por los programas oficiales.
- Lógico, progresa según una estructura lógica lineal, cada capítulo supone conocido el anterior.

Cuando el profesor prepara su curso trabaja en la transposición didáctica, pero como indica Chevallard, no está haciendo la transposición didáctica, ésta hace tiempo que ha comenzado, él escribe una variante particular de esta transposición, y suponer lo contrario sería admitir que el enseñante transforma, directamente y por propia iniciativa, el saber-sabio, sin limitaciones de orden social o provenientes del sistema de enseñanza, lo que es radicalmente falso.

La determinación de los objetos de enseñanza pasa en la mayoría de los países por el intermediario de los diseños curriculares o programas oficiales, sin que la gran mayoría de los profesores tenga la oportunidad de intervenir en su elaboración. El propio sistema didáctico, en tanto que sistema abierto, está rodea-

[11] ibid., p. 14.

do por un sistema de enseñanza, inmerso en la sociedad, a la que pertenecen los padres, los matemáticos, las instancias políticas, etc., toda una periferia que se ha venido denominando **noosfera**[12]. Y es en esta noosfera, que tiene sus propias representaciones del sistema de enseñanza, donde van a empezar a gestarse todo tipo de negociaciones entre los diferentes agentes, que tienen por objeto hacer que la enseñanza sea compatible con su entorno, garantizando que el saber a enseñar aparezca como suficientemente próximo al saber sabio, garantía de legitimidad y exigencia de los matemáticos, y suficientemente alejado del saber de los padres y del saber banalizado de la sociedad, para que la escuela no pierda su prestigio, tratando de reequilibrar todas las tendencias a través de la manipulación del saber.

La mayoría de las actuaciones de la noosfera se centran en los contenidos de enseñanza, más que en los métodos, basándose en una teoría superficial del error, con la idea de que un cambio de contenidos resolverá las dificultades de aprendizaje. Por otra parte, la actuación sobre los métodos se presenta siempre como más difícil de abordar, requiere más tiempo y vencer más resistencias, y su resultado es siempre incierto, contrastando con lo simple y rápido que es un cambio de contenidos.

El saber a enseñar, para que pueda ser controlado socialmente a través de la evaluación de los alumnos, debe ser público, y ello determina de hecho qué tipo de saberes serán transmitidos, de forma que muchos saberes del tipo: saber razonar, saber resolver problemas, etc. pasan a la categoría de objetivos, constituyendo lo que Chevallard ha denominado objetos de saber auxiliares, cuando no saberes invisibles, no considerados por la didáctica.

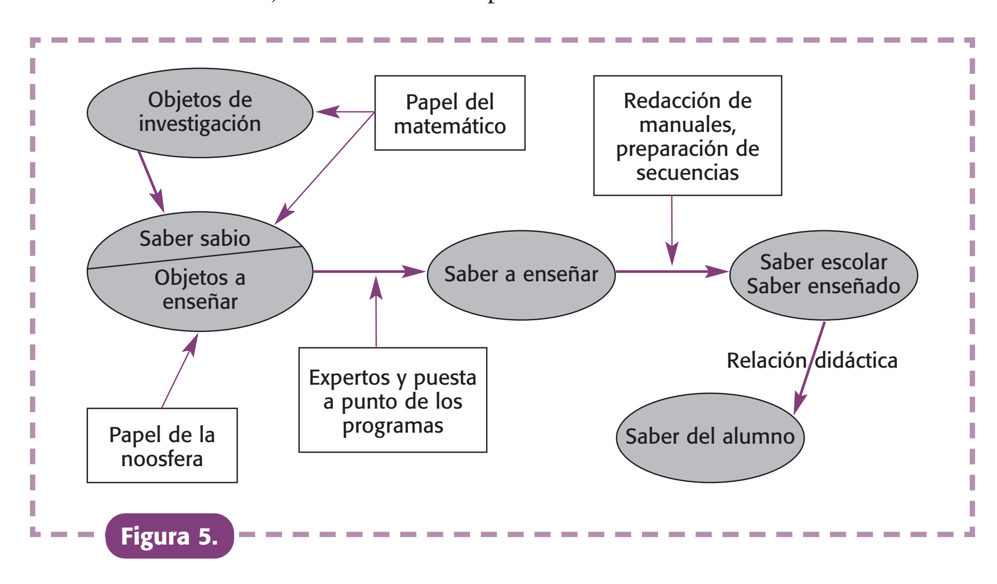


Figura 5.

[12] El término noosfera proviene del acuñado por Theilard de Chardin, pero su significado es aquí muy distinto, designa el conjunto de lugares e instancias donde tienen lugar los intercambios del sistema de enseñanza y su entorno: asociaciones de especialistas, comisiones de reflexión sobre la enseñanza, sindicatos de profesores, asociaciones de padres, etc.

Actividad 3: Determinar cuáles son el saber sabio, el saber a enseñar y el saber enseñado para el objeto «numeración decimal».

Consultar varios libros de texto y observar qué transposición didáctica se hace de la medida de magnitudes. Contrastar lo encontrado con lo que se dice en el Capítulo 8.

Una de las consecuencias más importantes de la transposición didáctica es la contradicción existente entre el tiempo de enseñanza y el tiempo de aprendizaje. El primero es fijo y viene delimitado en los propios programas oficiales, es el denominado tiempo didáctico; hay un texto del saber que está en relación con un tiempo y que constituye una interacción propia del proceso didáctico, supone una programación de la adquisición del saber. El tiempo de aprendizaje es sin embargo variable, depende de cada alumno en particular, de ahí la evidencia de que tiempo didáctico y tiempo de aprendizaje no tienen por qué coincidir, lo que constituye, a nuestro juicio, uno de los desafíos más importantes a nivel didáctico, ya que habría que buscar aquí la causa de muchos fracasos escolares.

La temporalidad impuesta por el tiempo didáctico es de carácter legalista, acumulativa e irreversible, en tanto que el tiempo de aprendizaje es personal, no continuo, pues necesita de continuas reestructuraciones, y tiene una temporalidad subjetiva, por lo que ambos tiempos no son isomorfos.

Esta no coincidencia podría generar graves disfuncionamientos en el sistema didáctico, que solventa el problema a través de transacciones y negociaciones en torno al tipo de respuestas que serán exigidas a los alumnos, lo que hace aparecer la algoritmización de procedimientos, que juegan el papel de transacción entre el saber enseñado y el saber a saber. Muchas de estas transacciones se encuentran relacionadas con el contrato didáctico, pudiendo interpretarse en términos de efectos, como por ejemplo el Topaze, del que hablaremos a continuación, donde hay una negociación a la baja del saber, así como otros fenómenos de contrato que suponen la manipulación del saber en juego y la exigencia que de él se hará en la clase.

Las posiciones del enseñante y el enseñado son diferentes en la transposición didáctica, tanto en relación al tiempo, hay diacronía en el sistema didáctico: **cronogénesis**, como a la manera de conocer, no hay identidad entre el saber del enseñante y el del enseñado, y el lugar del profesor en relación al saber no es intercambiable con el del alumno: **topogénesis**. La topogénesis supone la existencia de dos regímenes de saber diferentes en la clase, articulados según los mecanismos transaccionales ya mencionados.

«La construcción de una teoría de situaciones adecuada supone un cambio de temporalidad, o más bien la toma en consideración del problema de la articulación entre varias temporalidades no isomorfas.»[13]

[13] CHEVALLARD, Y.: *La Transposition Didactique*, Grenoble, La Pensée Sauvage, 1985, p. 88.

6. El contrato didáctico

En lo anterior, ha venido deslizándose un concepto importante para comprender cómo se gesta el aprendizaje matemático en la institución escolar, nos referimos al contrato didáctico. Experiencias sobradamente conocidas, como la edad del capitán[14], han puesto de manifiesto la necesidad de romper el contrato didáctico clásico, impuesto la mayoría de las veces de forma inconsciente por el uso, que rige una gran parte de las actividades escolares; según este contrato, el maestro enseña y el alumno copia la información para aprenderla, el maestro es el responsable del aprendizaje y el que tiene la facultad de enseñar, el maestro dice lo que está bien y lo que está mal, dice lo que hay que hacer, etc., contrato evidentemente insostenible si se busca que el aprendizaje se base en modelos a-didácticos.

Actividad 4: Explicar en qué aspectos el contrato didáctico clásico es contradictorio con un aprendizaje a-didáctico.

Se designa con el nombre de **contrato didáctico** el conjunto de comportamientos específicos del maestro que son esperados por el alumno, y el conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el maestro. El contrato didáctico fija cómo se organizan las responsabilidades recíprocas de unos y otros, así como su evolución a lo largo de la enseñanza. La parte del contrato didáctico que va a interesar a la Didáctica de las Matemáticas es la específica del conocimiento matemático buscado, que va a permitir la negociación del sentido de las actividades en juego.

El alumno y el profesor ocupan posiciones asimétricas en la relación didáctica, fundamentalmente en relación con el saber. El profesor no sólo sabe más que el alumno, sabe además de una forma diferente, la topogénesis y la cronogénesis de su saber son diferentes, y tiene la obligación de organizar las situaciones de enseñanza de la manera más adecuada para el alumno. El contrato didáctico distribuye papeles diferentes a unos y otros en el tratamiento de un objeto de saber dado.

La topogénesis del saber es diferente en alumno y profesor, el primero hace ejercicios, el segundo la teoría, uno está del lado de la *práctica*, el otro del lado del *sabe*r. El profesor sabe la relación que guardan unos objetos con otros, tiene poder de anticipación, puede decretar lo que es materia de enseñanza y lo

[14] Se propuso a 97 alumnos de 2º y 3º de Primaria el siguiente enunciado: «En un barco hay 26 cabras y 10 corderos. ¿Cuál es la edad del capitán?». De los 97 alumnos, 76 dieron la edad del capitán usando los datos del enunciado. La descripción y análisis de esta experiencia puede encontrarse en CHAMORRO, M.C. (1991): *El aprendizaje significativo en matemáticas*, Alhambra Longman: Madrid.

que es antiguo y ya no lo es. Está, por una parte, lo que el maestro debe enseñar y cómo debe enseñarlo, y por otra, lo que el alumno debe saber y cómo debe saberlo.

El saber del profesor tiene una cronogénesis diferente a la del alumno; el profesor *sabe antes que los otros*, *lo sabe ya* y *sabe más*, y por ello puede conducir la cronogénesis del saber, insertando su saber dentro de una cronología didáctica diseñada al efecto, en tanto que el conocimiento del alumno se va construyendo a medida que avanza el tiempo en la relación didáctica.

La noción de contrato es aplicable no sólo a nivel de una situación, puede extenderse a toda una serie de situaciones o a un nivel de enseñanza en tanto que medio de partir el tiempo didáctico en sesiones. La noción de contrato didáctico es una de las aportaciones más importantes de Guy Brousseau a la didáctica de las matemáticas, pues esta noción permite un análisis muy fino en términos didácticos de los aprendizajes matemáticos en el contexto escolar.

En la situación de formulación antes descrita (pág. 76), algunos alumnos confeccionan mensajes para que el grupo receptor construya la banda, inspirados claramente en el contrato didáctico clásico de la medida de magnitudes. Según este contrato, todo en medida pasa por el número y la aritmética, por lo que los procedimientos de comparación de cantidades de magnitud rara vez usan la comparación directa, en beneficio de procedimientos algoritmizados que no siempre tienen sentido para el alumno.

Así, dos alumnos de 3º de Educación Primaria, Javier y Danilo, han hecho lo siguiente: en la banda verde recibida han comenzado a hacer rayas simulando una graduación, poniendo después un número en cada raya, así llegan a 60. Han mandado el siguiente mensaje: «tienes que hacer una tira verde de 60 metros». Al ser preguntados cómo saben que son 60 m, Javier responde: «porque con el lápiz he puesto los números y he llegado a 60».

La respuesta de Javier pone claramente de manifiesto, cómo la solución dada al problema planteado, la comunicación de la longitud, es resuelta bajo la influencia del contrato didáctico habitual que funciona en la medida de magnitudes. Basta, tal y como es habitual, con dar un número y todo estará resuelto, no importa si la respuesta es absurda (la banda mide 28 cm). Es justamente la ruptura de este contrato didáctico la que va a permitir a los alumnos comprender las nociones de longitud y unidad de medida.

6.1. Los efectos producidos por disfuncionamientos del contrato didáctico

En todas las situaciones didácticas, el profesor trata de hacer saber al alumno lo que espera de él, lo que desea que haga, forma parte de las expectativas del contrato didáctico. Desde un punto de vista teórico, bastaría con que el profesor

propusiese una situación específica del conocimiento buscado, que una consigna clara de la misma permitiese la comprensión y devolución de la situación al alumno, que entraría así en el juego buscando la resolución, lo que daría lugar al aprendizaje. Pero cuando el alumno no acepta esta devolución y rechaza o evita entrar en el problema, el maestro, que tiene obligación social de que éste aprenda, hace aflorar una de las paradojas de la relación didáctica ligadas a la devolución: «el maestro no puede decir al alumno lo que es necesario que haga, sin embargo, es necesario que lo obtenga».

Empieza así a gestarse un método de producción de respuestas, que va a hacer aparecer una segunda paradoja de la relación didáctica. El profesor quiere que el alumno produzca respuestas adecuadas, como una manifestación externa de que ha adquirido el saber, del éxito, al menos aparente, de la enseñanza, pero el alumno no dispone de los medios cognitivos necesarios, puesto que justamente el objeto de la enseñanza es que pueda disponer de ellos.

Entre las posibilidades de tratar estas paradojas aparecen dos soluciones extremas: el profesor dice exactamente al alumno lo que espera obtener como respuesta, con lo que el objeto de enseñanza se convierte en algo extraño al sujeto, o bien, puede por el contrario, facilitarle alguna nueva herramienta para abordar un problema nuevo más sencillo, con lo que la actividad del alumno puede desplegarse en vano, quedando muy lejos del problema propuesto inicialmente.

El deseo de escapar de estas contradicciones lleva a alumnos y profesores a adoptar estrategias, todas ellas apoyadas en el contrato didáctico, tendentes a evitarlas.

Los alumnos para escapar a la angustia provocada por las preguntas, exigen que las preguntas que les haga del profesor, sean tales que ellos tengan de antemano la respuesta, y requieren que éstas sean transformadas rápidamente en algoritmos, que puedan ser memorizados, y que les proporcionarán las reglas claras de cómo y cuándo emplearlos. Los profesores, deseosos de reconocer indicios de aprendizaje, caen con facilidad en la trampa que les tienden los alumnos; obtienen respuestas adecuadas a sus preguntas, y tienen la sensación de que los alumnos aprenden, pero a medio plazo descubren que los alumnos aparentemente despiertos, que parecía que comprendían y aprendían, en realidad no saben nada.

Las conductas anteriores llevadas al extremo proporcionan efectos catalogados e identificados en Didáctica de las Matemáticas como efectos: Jourdain, Topaze, deslizamiento metacognitivo, analogía, Bloom, Dienes[15], etc.

---

[15] El primero en tipificar estos efectos fue G. Brousseau. La descripción detallada de ellos, puede encontrarse en la obra antes citada CHAMORRO, M.C. (1991): *El aprendizaje significativo en matemáticas*, Alhambra Longman: Madrid.

En el *efecto Topaze*[16], el maestro propone de forma explícita determinadas cuestiones al alumno, pero es él quien *toma a su cargo, bajo su responsabilidad, lo esencial del trabajo*. Si el alumno fracasa, en un afán de ocultar la incapacidad de éste para encontrar la respuesta, el enseñante negocia una respuesta a la baja; para ello, añade sucesivamente informaciones suplementarias reductoras de sentido, indicios que le ayuden a encontrar la respuesta, y así hasta que ésta se produce. El resultado es que la respuesta del alumno, aunque sea correcta, se encuentra desprovista de todo sentido, y ello porque esa negociación del contrato didáctico priva al alumno de las condiciones necesarias e inherentes a la comprensión y aprendizaje de la noción perseguida.

El *efecto Jourdain*[17] es una degeneración del efecto Topaze. *«El profesor, para evitar el debate con el alumno sobre el conocimiento, y constatar eventualmente el fracaso de éste, admite y reconoce el indicio de un conocimiento sabio en los comportamientos o respuestas del alumno, aunque éstas hayan sido motivadas por causas y significaciones banales...»*[18].

Las respuestas banales del alumno son presentadas como indicios de dominio de un conjunto de cuestiones sofisticadas, como la manifestación de un saber sabio.

El *efecto de analogía* consiste en reemplazar el estudio de una noción compleja por el de otra análoga más sencilla.

El efecto de *deslizamiento metacognitivo* consiste en tomar como objeto de estudio una técnica útil para resolver un problema, perdiendo de vista el problema inicial y el saber que se pretendía desarrollar, de manera que el medio se convierte en fin en sí mismo.

Actividad 5: Buscar un ejemplo de cada uno de los efectos descritos en la enseñanza de las matemáticas que se hace en la Educación Primaria.

7. Epistemología y enseñanza de las matemáticas

Aunque la génesis artificial del saber, de la que hemos hablado antes, no siga los pasos de la génesis histórica, el conocimiento de ésta es imprescindible como punto de partida para el análisis didáctico. Conocer la historia de un saber nos informa sobre cómo ha evolucionado, cuáles han sido las distintas

[16] El nombre de Topaze tiene su origen en la obra del mismo nombre de Marcel Pagnol. En ella, el maestro trata de que el alumno escriba el plural correcto de la palabra «mouton» en un dictado: des moutons étaient réunis... Para ello, Topaze dicta varias veces «des moutons» (la s final de este plural no suena en francés); como el alumno sigue sin escribir la s final, el profesor pasa a dictar de forma disimulada la respuesta esperada: «des moutonsses étai-hunt réunisse...».

[17] El nombre está tomado de la obra de Molière *El burgués gentilhombre*. En ella, monsieur Jourdain, plebeyo enriquecido venido a más, decide recibir clases de retórica. En una escena determinada, el maestro está enseñando las vocales a M. Jourdain. Éste le pregunta en un momento dado, si están haciendo prosa, a lo que el maestro *no puede* sino responder que sí, si no quiere entrar con M. Jourdain en un debate que no podría comprender.

[18] BROUSSEAU, G.: «Quelques conduites détérminantes en Didactique des Mathématiques», IREM Bordeaux, 1984, p. 11.

significaciones de un concepto, los problemas que han motivado su nacimiento y a los que pretende dar solución, aspecto este muy importante a efectos de contextualizar después la enseñanza que de él se haga, nos permite, también, reconocer los procesos generales del pensamiento matemático, de la matemática como cultura.

El saber no puede ser enseñado directamente, tal y como figura en el corpus matemático, debe sufrir ciertas transformaciones; las matemáticas del matemático no son las matemáticas del maestro, al igual que éstas no son las del alumno, las tres son cualitativamente distintas. Se deduce, por tanto, la necesidad de un tratamiento didáctico del saber, de una *transposición didáctica*[19] que transforme el objeto de saber, lo que se llama *saber sabio*, en objeto de enseñanza, el *saber a enseñar*. Pero las transposiciones didácticas que se hacen no son siempre adecuadas, y una de las tareas de la didáctica es la de ejercer una vigilancia epistemológica que garantice que las transformaciones sufridas por el saber sabio no lo han convertido en algo irreconocible, matemáticamente hablando, y desprovisto de sentido, viendo qué elementos mínimos son necesarios respetar para que las transposiciones realizadas conserven el sentido del concepto y no lo desvirtúen.

El problema del sentido es de gran importancia en didáctica de las matemáticas, y se halla ligado a la construcción de concepciones correctas del conocimiento. Una de la hipótesis fuertes de la teoría es que el conocimiento de una noción adquiere parte de su sentido en aquellas situaciones en las que interviene como solución[20].

La noción de concepción está fuertemente ligada a la de situación. Una *concepción* se caracteriza por un conjunto de conocimientos reagrupados, que producen ciertos comportamientos y decisiones, frente a un conjunto de situaciones.

La práctica totalidad de los alumnos de 5º de Educación Primaria, curso en el que se trabaja la superficie, tienen una concepción de ésta que tiende a identificar superficie y forma, de manera que están convencidos de que un cambio de forma lleva aparejado necesariamente un cambio de superficie. Como veremos más adelante, tienen también una concepción perimétrica de la superficie; según esta concepción para determinar y describir una superficie poligonal basta con dar la medida de sus lados.

Dentro de la perspectiva del aprendizaje por adaptación, las dificultades que el alumno encuentra son fundamentales para provocar esta adaptación, y constituyen elementos indispensables para la comprensión de nuevos saberes, siendo

---

[19] La noción de transposición didáctica se debe a Y. Chevallard, autor de la obra *La transposición didáctica,* AIQUE, Buenos Aires, 1998, a la que remitimos para profundizar sobre los procesos de transposición didáctica.

[20] Véase en el capítulo anterior la Teoría de los Campos Conceptuales y la noción de concepción.

a veces constitutivas de éstos. Hay pues que interpretar las dificultades en el aprendizaje de los alumnos, como ligadas a concepciones antiguas que serán sustituidas por otras nuevas, para buscar después las situaciones problema que pongan claramente de manifiesto la existencia de soluciones mejores que las que el alumno conoce hasta ese momento, de forma que la nueva concepción aparezca como una solución a estas dificultades.

Hay que aceptar también que un saber no puede ser enseñado de forma directa conforme a las exigencias de la comunidad científica, a menos que se renuncie a la construcción del sentido por parte del alumno, por lo que a veces el profesor se ve forzado a enseñar un saber más o menos *falso* que deberá ser rectificado más adelante. Se plantea aquí el problema de las institucionalizaciones locales, que pueden generar concepciones erróneas que se constituirán en obstáculo para el verdadero conocimiento, que va a requerir rupturas cognitivas y cuestionamiento de saberes antiguos. En un aprendizaje por adaptación, los conocimientos creados por los alumnos son a menudo locales, por lo que las nociones están particularizadas y limitadas, deformadas en su sentido y su expresión, y se encuentran ligadas de forma casual y errónea a otros conocimientos, que son a su vez provisionales e incorrectos. Además, la permanencia, a veces prolongada de estas nociones, en tanto que siguen resolviendo satisfactoriamente cuestiones locales, refuerza esta significación y aumenta su valor, haciendo más difícil su rechazo posterior, convirtiéndose en un obstáculo para aprendizajes futuros.

Así por ejemplo, en tanto que los alumnos no conocen los números decimales, el maestro se las arregla para que en las mediciones sólo aparezcan números enteros, y se juega la ficción, absolutamente necesaria en la relación didáctica, de que las medidas que se realizan son exactas, lo que sólo es posible en la teoría pero que no ocurre jamás en la realidad por muy sofisticados que sean los aparatos de medida que se usen.

En otras ocasiones, los ejemplos y casos que se eligen son absolutamente particulares y marcan la formación de las concepciones de los alumnos. Así, los alumnos creen que la unidad de medida debe ser siempre menor que el objeto a medir, cosa habitual en la práctica escolar, que trata de evitar el fraccionamiento de la unidad y por tanto la aparición de los números decimales que el alumno no conoce; tal concepción es evidentemente falsa.

Actividad 6: A partir de la experiencia de la edad del capitán, describir la concepción que tienen los alumnos de lo que es un problema y en qué consiste su resolución.

Si la concepción mayoritaria de los alumnos es que la multiplicación hace aumentar y la división disminuir, ¿qué problemas posteriores puede encontrar el alumno cuando se enfrente a otros conjuntos de números distintos de los naturales?

BIBLIOGRAFÍA

BRIAND, J. y CHEVALIER, M.C. (1995): *Les enjeux dans la relation didactique*, Hatier, París.

BROUSSEAU, G. (1991): *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble (existe versión inglesa en la misma editorial).

CHAMORRO, M.C. (1991): *El aprendizaje significativo en matemáticas*, Alhambra-Longman, Madrid.

CHEVALLARD, Y. (1998): *La Transposición didáctica*, Aique, Buenos Aires.

JONNAERT, Ph. (1988): *Conflits de savoir et didactique*, De Boeck, Bruxelles.

VERGNAUD, G. (1990): *El niño, las matemáticas y la realidad*, Trillas, México.

CAPÍTULO 4

La construcción del número natural y la numeración

ÍNDICE

María Luisa Ruiz Higueras

El concepto de número no se reduce ni al proceso de conservación, ni a la actividad de cardinación, ni a la resolución de una determinada clase de problemas, ni a procedimientos algorítmicos, ni a la comprensión y manipulación de signos sobre el papel. Pero es, de este conjunto de elementos diversos, de donde emerge, con la ayuda del entorno familiar y escolar, uno de los edificios cognitivos más impresionantes de la humanidad.

Gerard Vergnaud[1]

1. Introducción

Los conocimientos que estudiaremos didácticamente a lo largo de este tema están relacionados con la construcción escolar del número natural y la numeración. Estos conocimientos tienen una característica muy singular: se trata de saberes *naturalizados*. Socialmente consideramos que los números naturales nos vienen dados, que han existido siempre tal y como los conocemos. Identificamos un número asociándolo de modo espontáneo a su nombre: veinte, seis, diez, setenta, como un objeto más de nuestro entorno. Las actividades de contar o de designar los números parecen formar parte de la naturaleza humana y, socialmente, se considera que, para realizarlas, no hay «nada que saber». La mayoría de nosotros las llevamos a cabo de manera automática, con gran naturalidad, no cuestionándonos las condiciones de su realización. Son acciones evidentes, transparentes, que basta con realizar.

Bien es verdad que todas las personas, desde nuestra infancia, construimos una noción intuitiva de los primeros números asociada estrechamente a las colecciones con las que nos relacionamos y no como un ente abstracto. Pero el concepto de número natural no emerge de modo trivial, Lebesgue[2] (1975) afirma que los números dan cuenta de una operación de medida que los produce: «a partir de constataciones llevadas a cabo en poblaciones primitivas se confirma la hipótesis de que los hombres han llegado a contar, cuando querían comparar dos colecciones; es decir, comparar dos colecciones con una misma colección tipo, la colección de palabras que constituían una cierta secuencia».

La configuración de toda una estructura numérica, junto con los principios de un sistema que permitió su designación, tuvo su origen en la matemática babilónica, más tarde se amplió con las aportaciones de la matemática griega. La notación decimal hindú surgió en la escuela matemática de Bagdag en el año 770 y, alrededor del año 825, se comenzó a difundir a través de la obra del matemático árabe Al Khwarizmi. A principios del siglo XII, esta obra fue traducida al latín por Gerardo de Cremona y Robert de Chester, miembros de la escuela de traductores de Toledo, introduciéndose, de este modo, el sistema de numeración decimal en Europa.

---

[1] VERGNAUD, G. (1990, p. 13), en Fayol, M. *L'enfant et le nombre*, París: Delachaux et Niestlé.

[2] LEBESGUE, (1975, p. 3): *La mesure des grandeurs.* París: Blanchard.

«Lo que los árabes aprendieron de los hindúes y enseñaron a los europeos no fue solamente la escritura de los números, sino también el método del cálculo escrito, llamado algoritmo por los europeos de la Edad Media (palabra derivada de Al Khwarizmi). Anteriormente, todos los cálculos aritméticos se hacían sobre un ábaco y la escritura racional de los números se consideraba despreciable, por el contrario, el algoritmo posicional de los números indo-arábigos estaba totalmente adaptado al cálculo escrito y, además permitió su desarrollo» (Freudenthal, 1991)[3].

En este capítulo vamos a analizar aspectos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del número y la numeración. Por ello, para adentrarnos en el capítulo, proponemos llevar a cabo una lectura detenida del ejemplo 1.

Objetivos

– Estudiar y analizar, desde el punto de vista matemático y didáctico, la noción de número natural y de sistema de numeración.

– Aproximarnos a diferentes modelos de enseñanza del número y de la numeración para determinar cómo la institución escolar ha considerado, y considera en la actualidad, estos conocimientos matemáticos en los primeros niveles escolares.

– Construir, bajo una hipótesis constructivista por *adaptación al medio*, la situación fundamental para la cardinación de una colección, determinar sus variables didácticas para generar una familia de situaciones didácticas derivadas de ella.

– Analizar las situaciones que pueden dar significación al número natural y a la numeración en los niveles escolares donde comienzan a construirse estos conocimientos matemáticos.

– Determinar y analizar los procedimientos que pueden emplear los alumnos en la resolución de los problemas anteriores, así como la actividad matemática que desarrollan con ellos.

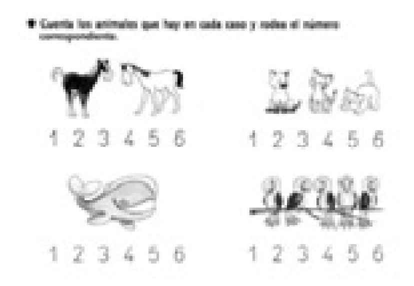
– Estudiar la evolución seguida en la designación de los números: análisis, limitaciones y propiedades de diferentes sistemas de numeración.

– Llevar a cabo análisis didácticos de situaciones de enseñanza-aprendizaje del número y de la numeración.

– Analizar errores cometidos por los niños en relación con estos conocimientos matemáticos e identificar sus causas.

[3] Freudenthal, H. (1991): Notation Mathematique. Enciclopaedia Universalis.

Situación escolar: Tomamos una ficha de un manual para alumnos que están iniciando su relación escolar con el número natural. En ella se pide que asignen, a cada una de las colecciones presentadas, el número de objetos.



Para responder a esta tarea, los alumnos deben proceder a contar los elementos de cada colección y la última palabra-número pronunciada considerarla como el cardinal de dicha colección, es decir, su número de elementos.

Supongamos que algún alumno, en lugar de asignar, en el cuarto caso, el cardinal correcto, 5, le asigna 4. Cualesquiera que sean las razones por las que el alumno ha cometido este error, lo que sí podemos constatar es que el ejercicio, por sí mismo, no le «dice» al alumno que su respuesta ha sido incorrecta.

Este ejercicio no produce una «retroacción» que permita al alumno evaluar por sí mismo si ha llevado con éxito su tarea o bien ha fracasado, por lo tanto, debe esperar el juicio del profesor para saber si su solución ha sido correcta o no. Este ejercicio, si bien es necesario en un momento dado del aprendizaje del alumno, para determinar si ha adquirido la escritura correcta de los números, no puede asimilarse a una situación de aprendizaje constructivo del número.

Situación familiar: Si pedimos a un niño de cinco años que lleve a cabo una tarea tan cotidiana como es la de colocar en la mesa los platos para la comida, puede poner en funcionamiento varios procedimientos:

- Toma un plato en la cocina para su madre y lo lleva a la mesa, luego, vuelve, toma otro para su padre y lo lleva a la mesa, vuelve, toma otro para su hermano y lo lleva a la mesa y así sucesivamente, para todos los miembros de la familia.
- Toma muchos platos de una vez y los lleva a la mesa; así, asegura que tendrá para todos.
- Prevé un plato para su madre y lo toma, otro para su padre y lo toma, otro para su hermano y lo toma, etc. luego, junta todos y los lleva a la mesa.

Esta situación familiar, sin carácter didáctico, ya que no tiene intención de enseñar ningún conocimiento, pone en juego, sin embargo, saberes matemáticos: la correspondencia término a término, o bien la construcción de una colección coordinable a una dada, *sin la presencia* de esta última. En este último caso, el número, formulado o no, es la solución al problema que debía resolver el niño, ya que le ha permitido prever, es decir, «anticipar» la necesidad de un plato para su madre, otro para su padre, otro para su hermano, etc. antes de llevarlos efectivamente a la mesa.

Si analizamos la tarea propuesta y los procedimientos que pone el niño en funcionamiento, observamos que:

- No necesitará la aprobación de un adulto para saber si ha tenido o no éxito en su tarea.
- Puede constatar él mismo su error y modificar su estrategia.

Esta situación permite al niño determinar por sí mismo si ha tomado o no los platos necesarios para que cada miembro de su familia tenga uno, ya que le devuelve «retroacciones», es decir, le informa sobre la validez o no de su procedimiento.

A diferencia del ejercicio escolar propuesto en la ficha anterior, el concepto de número se construye en un contexto donde es funcional: sirve para resolver problemas reales.

Ejemplo 1[4].

[4] Adaptación de BRIAND, J. y CHEVALIER, M.C. (1995, p. 18): *Les enjeux didactiques.* París: Hatier.

Ante las dos situaciones anteriores, podríamos formularnos las siguientes cuestiones:

¿Cómo generar situaciones problema en la escuela en las que el número no sea simplemente «mostrado», sino que aparezca como solución óptima a problemas reales?

¿Se pueden modificar las prácticas escolares sobre la enseñanza del número y la numeración para que los alumnos construyan estos conocimientos con toda su significación?

Para comprender didácticamente las respuestas que podemos dar a estas cuestiones, conviene que nos acerquemos brevemente a diferentes modelos de enseñanza del número y la numeración, ya que implican una consideración muy diferente de estos conocimientos. Este análisis previo nos ayudará a llevar a cabo una reflexión sobre qué es el número natural o en qué consiste la numeración.

2. La enseñanza del número y de la numeración. Breve reseña histórica

Un breve análisis de la evolución que, en los tres últimos períodos históricos, se ha seguido en los programas y manuales escolares en relación con el número y la numeración nos va a servir como iniciación al análisis didáctico que llevaremos a cabo a lo largo de este tema. Este estudio, relativo a procesos de *transposición didáctica*, nos permitirá determinar cómo la institución escolar ha considerado estos conocimientos matemáticos, los cambios que han sufrido, las consecuencias que se han derivado en cuanto a la enseñanza y al aprendizaje, los conceptos matemáticos sobre los que se han sustentado, con objeto de situar, justificar y dar sentido a las propuestas de enseñanza que presentaremos más adelante.

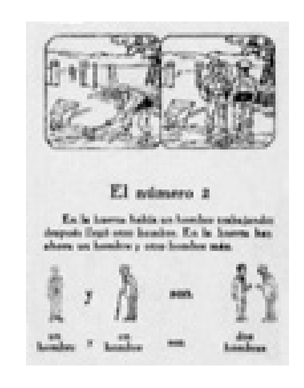
Período de 1953 a 1971

Los contenidos aritméticos relativos a los primeros cursos de la Educación Primaria tenían como objetivo fundamental: *nombrar, escribir y leer los números, y aprender las cuatro operaciones aritméticas elementales. Composición y descomposición de los números. Tratamiento monográfico de cada uno. Numeración práctica: hablada y escrita.*[5]

En los textos escolares los números se presentaban, comenzando por la unidad, uno tras otro. Todo número se formaba a partir del anterior, por iteración

[5] Cuestionarios Nacionales para la Enseñanza Primaria. (1953 p. 63-79) DGEP. Madrid, Ministerio de Educación Nacional.







de la unidad, mostrando siempre colecciones de objetos. La ostensión es el modelo se presentación empleado por excelencia:

Como podemos ver, en el manual anterior[6], se introduce cada número como un objeto preexistente, más tarde, se presentarán sus descomposiciones insistiendo en la repetición de numerosos ejercicios.

La hipótesis implícita de aprendizaje que los autores asumían era fundamentalmente empirista: el aprendizaje se basa en la experiencia, graduando adecuadamente los pasos desde lo más simple a lo más complejo. Para aprender basta observar, reproducir y repetir.

¿Qué concepción de número inducían? En estos manuales el número es: una palabra, un signo, una colección, una constelación, una igualdad (5 = 3 + 2)...; todo a la vez. Por ello se distingue entre números «concretos» y «abstractos».

> «Números concretos son los que expresan la especie de sus unidades. Siete pesetas, cuatro niños, quince metros, etc.
>
> Números abstractos son los que no expresan la especie de sus unidades: cuatro, siete, doce».[7]

La numeración no se estudiaba por sus principios, sino que, al presentar el número diez, o el cien, se introducía la noción de decena o centena y se daban reglas de lectura y escritura. La numeración servía para estructurar la enseñanza: los números, las operaciones, el sistema métrico, etc., pero no aparecía como un objeto de estudio independiente. Los alumnos aprendían a contar y, así, se generaban los números.

Período de 1971 a 1992

En los programas escolares de 1971, por primera vez, se hacía referencia a la necesidad de que los alumnos adquiriesen «conocimientos prenuméricos»:

---

[6] Charenton, A. (s.f.): *Lecciones de cálculo*. Madrid: Estudio.

[7] Aritmética 2º Grado, 1954, Burgos: H.S.R.

«En la primera etapa de EGB se pretende que los alumnos sean capaces de llegar a la expresión numérica mediante el ejercicio y la expresión consciente de las relaciones entre conjuntos, la comprensión del número como una propiedad de aquéllos».[8]

«El estudio de los conjuntos y las correspondencias forma parte del período prenumérico que prepara la comprensión del número natural. ...El objetivo que se pretende al realizar experiencias con correspondencias enlaza con lo que se ha indicado en Preescolar, pues se trata de profundizar en la comprensión de la relación *hay tantos como* para que capte cada vez más el número como una propiedad de los conjuntos. ...El alumno debe profundizar en las grandes líneas que llevan al conocimiento del número natural, partiendo de la teoría de conjuntos. ...El número es una propiedad de los conjuntos, por lo que es lógico que el niño se familiarice con los conjuntos antes que con los números. ...Cada número natural es el cardinal de una familia de conjuntos, de todos los que son coordinables entre sí.»[9]

¿Qué concepción de número se induce? En los programas de 1971 y en los «programas renovados» de 1981 se promueve una nueva concepción de número natural como *cardinal de un conjunto finito*.



En los manuales escolares y en las aulas se lleva a cabo una transposición didáctica del número natural basada en la teoría de conjuntos. Se pretendía dar respuesta a la cuestión ¿Qué es el número natural? Por ello, en la progresión del conocimiento escolar, se considera necesario comenzar por las nociones de conjunto, correspondencia, biyección, relación, etc. consideradas como nociones prenuméricas, ya que sin ellas no es posible «construir» el número. Aunque, normalmente, se presentaban los números comenzando por el uno y se seguía la progresión natural, sin embargo, cada número no se construye por la adición de la unidad al número anterior, sino como propiedad de una familia de conjuntos coordinables entre sí.

En relación con la numeración, su objetivo es presentarla basándose en sus principios, a partir de distintas bases:

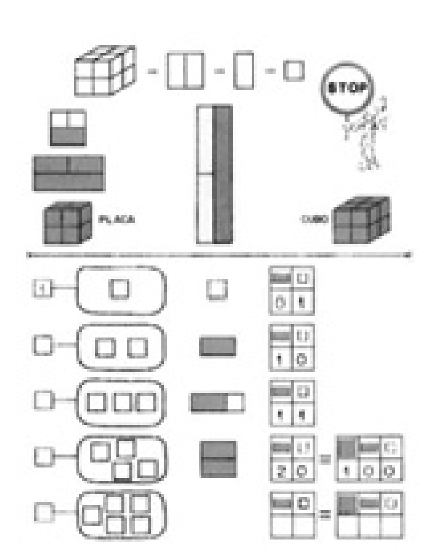
«El estudio de los sistemas de numeración en distintas bases, base 2, base 5, lleva al niño a familiarizarse con los cambios de unidades que después tendrá que hacer en el sistema decimal. ...El alumno interiorizará los distintos agrupamientos, según el sistema de numeración en el que esté trabajando, mediante la realización de muchos ejercicios».[10]

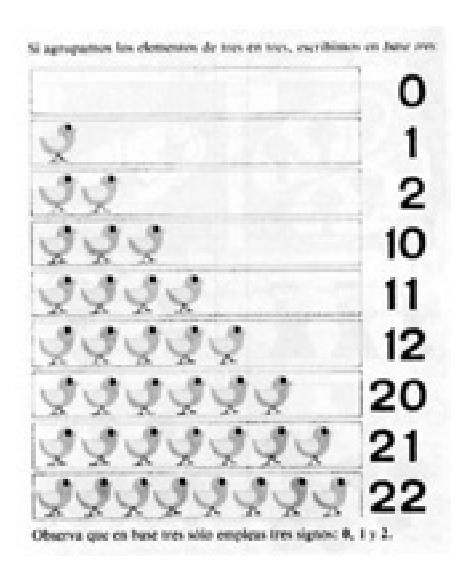
[8] Orientaciones de la Dirección General de Enseñanza Primaria del MEC (1971), Vida Escolar, p. 26. Madrid: CEDODEP.

[9] Programas Renovados (1971) Ministerio de Educación y Ciencia (p. 59-63).

[10] Programas Renovados (1971) Ministerio de Educación y Ciencia (p. 65).

La numeración se trata, al igual que el número, como un objeto de estudio. Los manuales organizan su enseñanza para dar respuesta a la cuestión *¿Cuáles son los fundamentos de un sistema de numeración posicional?* Se postulaba que, mediante la presentación de actividades en diferentes bases y a través de la manipulación de materiales (multibase de Dienes), los alumnos «abstraerían» las propiedades que permanecen constantes, es decir, los fundamentos sobre los que se asientan los sistemas de numeración posicionales.





En suma, si comparamos los dos períodos anteriores, observaremos que antes de 1971, los números se estudiaban unos después de otros por iteración sucesiva de la unidad y, con ocasión del estudio de cada número, se precisaban las reglas de escritura, las convenciones, los resultados relativos a las operaciones: sumas, diferencias, descomposiciones, ciertos productos, etc. Es el orden de los números lo que determina ampliamente su progresión. Al contrario, después de 1971, son las nociones las que van a servir como trama para su progresión: nociones denominadas prenuméricas (clasificación, orden, correspondencia), después la noción de número y, más tarde, la de numeración y demás operaciones.

Período a partir de 1992

En cuanto al número natural, en los nuevos diseños curriculares[11] para la reforma educativa se indican los siguientes contenidos:

– Necesidad y funciones del número: contar, medir, ordenar, expresar cantidades o particiones.

[11] Área de Matemáticas. Currículo Oficial Primaria. (1992), (p. 18-19) Madrid: MEC.

– Relaciones entre números. Números cardinales y ordinales.

– Sistema de numeración decimal.

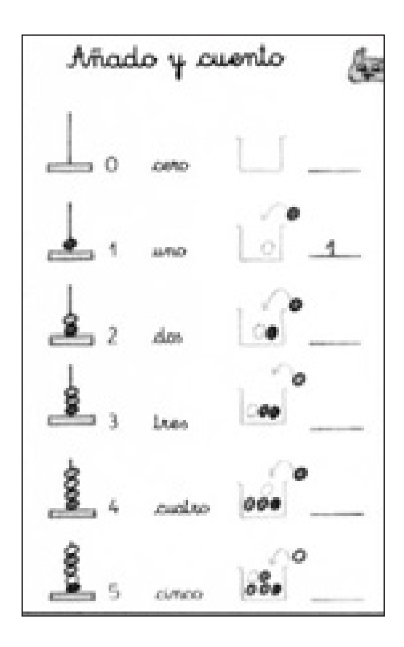
Y los objetivos que siguen:

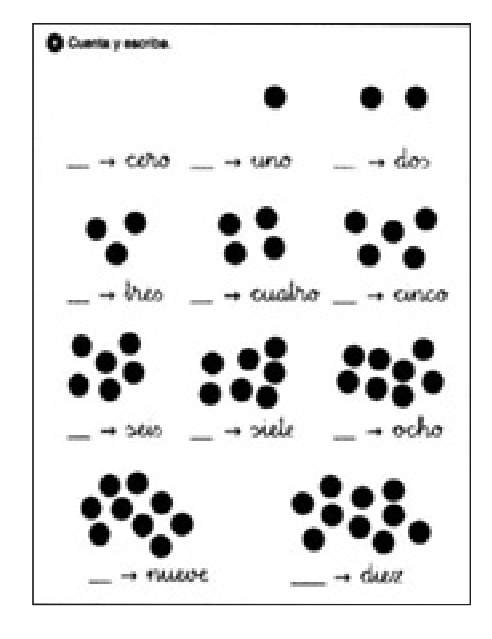
– Reconocer situaciones en las que existan problemas cuyo tratamiento requiera operaciones elementales de cálculo, formularlos mediante formas sencillas de expresión matemática y resolverlos utilizando los algoritmos correspondientes.

– Identificar en la vida cotidiana situaciones y problemas susceptibles de ser analizados con la ayuda de códigos y sistemas de numeración...

– Utilización de diferentes estrategias para contar de manera exacta y aproximada.

Estas indicaciones se reflejan en los textos escolares:





Se privilegia el procedimiento de contar como medio para introducir los números. Así, comenzando por el «uno», el siguiente, se designa como «dos», el siguiente «tres», etc. Cada uno de estos números, así introducidos, se acompaña de imágenes en las que se muestra ostensivamente que el «dos» está formado por un «uno y otro uno», el tres por un «dos y un uno» y, así, sucesivamente para el resto de los primeros números.

¿Qué concepción del número natural promueve esta presentación?

Es evidente que los manuales se apoyan en un conocimiento social, como es el contar, y promueven una concepción del número natural que Freudenthal[12] (1983) denomina como «*counting-number*», frente a la concepción *«cardinal-number»*.

No existe diferencia explícita entre número, colección y signo. La numeración se trabaja como un medio para designar los números, se presentan muy brevemente las reglas de funcionamiento y sólo se promueven ejercicios en el sistema de numeración en base diez.

La propuesta didáctica actual no trata de dar respuesta a las cuestiones: *¿qué es el número?* o *¿qué es un sistema de numeración?*, sino que ofrece herramientas útiles, como es el número y su designación, para *aplicarlas* posteriormente en la resolución de problemas.

Si bien las orientaciones didácticas facilitadas por los diseños curriculares insisten en el modelo de aprendizaje constructivista, los manuales escolares inducen un aprendizaje basado en la ostensión, la observación, la recepción y la repetición. Modelo sustentado en un empirismo sensualista.

En este sentido, la presentación que actualmente se lleva a cabo en los textos escolares tiene mucho en común con la llevada a cabo en el primer período histórico que hemos estudiado. Ante este retorno, Brousseau[13] (1996) considera que «la insuficiencia de conocimientos didácticos ha dejado al sistema educativo en la incapacidad de generar razonablemente sus reformas. …En los años setenta y ochenta se diversificaron las situaciones de enseñanza de los números, tratando de darles un sentido más rico y más completo. El conteo acompañaba al aprendizaje, pero no era su guía y su esencia. En la actualidad, se ha visto volver, como una avalancha, el aprendizaje de los números sólo por medio del conteo. Rechazo este retorno triunfal de métodos antiguos, esta contra-reforma debida a fenómenos de obsolescencia y al ritmo demasiado lento de los progresos en didáctica, ya que se ha instaurado sin un debate serio y eliminando de la cultura de los profesores conocimientos útiles y costosamente adquiridos».

Actividad 1: Tome varios manuales escolares de primer curso de Educación Primaria y, en relación con el número y la numeración, estudie:

- Modelo seguido en la presentación de los primeros números y de la numeración.
- Representaciones y esquemas que se emplean.
- Ejemplos y actividades que se proponen.
- Modelo de aprendizaje en el que, implícitamente, se sustenta la enseñanza que inducen.

Es conveniente utilizar, como herramientas de análisis, los modelos de aprendizaje explicados en el capítulo 2 de este texto y los contenidos matemáticos que aparecen en el Anexo de este capítulo.

---

[12] FREUDENTHAL, H. (1983, p. 86): *Didactical Phenomenology of Mathematiocal estructures.* Dordrecht: Reidel P.C.

[13] BROUSSEAU, G. (1996): La memoire du système educatif et la memoire de l'enseignant. (p. 101-115) *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques.* IREM París VII.

Esta breve aproximación a la transposición didáctica de dos objetos matemáticos: número y numeración, de singular importancia en las matemáticas escolares, nos ha permitido constatar que, en el análisis didáctico, no podemos considerar *transparente* el conocimiento matemático cuya enseñanza y aprendizaje queremos gestionar. Es muy necesario llevar a cabo una reflexión sobre la concepción de número natural que es necesario movilizar en el medio escolar, cuáles serán sus características o sus posibles restricciones, si los alumnos podrán construir con sentido el número, o bien sólo aplicarán los conocimientos que previamente les ha facilitado el maestro.

Actividad 2: De un manual escolar de 1841: *Aritmética de niños*[14], tomamos el siguiente texto:

P: ¿Desde cuándo tenemos necesidad de considerar los números?

R: Desde que vemos a un mismo tiempo muchos objetos o individuos de la misma especie: como cuando se ve un hombre y muchos hombres, un niño y muchos niños, un árbol y muchos árboles, etc.; porque en este caso concebimos lo que es unidad y pluralidad o muchedumbre. Si después comparamos la pluralidad con la unidad, lo que resulta de esta comparación se llama número: de manera que número es el resultado de la comparación de la pluralidad o muchedumbre con la unidad, o el que expresa la reunión de muchas unidades.

P: ¿Qué es lo primero que debemos saber acerca de los números?

R: Su nomenclatura o los nombres con los que se determinan las unidades que hay en cada conjunto.

P: ¿Cómo se ejecuta esto?

R: En primer lugar, cualquier objeto es en sí uno, después, cuando se quiere expresar la agregación de *uno* y *uno* se usa la palabra *dos*, y por tanto dos equivale a *uno* y *uno*; para expresar el conjunto de *dos* y *uno* se usa la palabra *tres*; para *tres* y *uno*, la palabra *cuatro*; *cuatro* y *uno* se expresa con la palabra *cinco*; *cinco* y *uno* con la palabra *seis*… (p. 1-2).

– ¿Qué relación existe entre la definición de número propuesta en este manual y la consideración que Lebesgue (1975) hace sobre el número? (Véase introducción a este capítulo).

– Establecer analogías o diferencias entre la presentación del número y la numeración que ofrece este texto y las presentaciones que aparecen en algunos manuales actuales.

3. Consideraciones didácticas en relación con la enseñanza y el aprendizaje del número y la numeración

Los análisis precedentes nos han mostrado que, a lo largo de los años, se han llevado a cabo propuestas didácticas diferentes para introducir en la escuela estos conocimientos matemáticos. Antes de proponer otros modelos, estimamos conveniente tener en cuenta las siguientes consideraciones didácticas:

[14] Vallejo, M. (1841): *Aritmética de niños escrita para el uso de las escuelas del Reino*. Madrid: Garrazayaza.

i) El número y la numeración son objetos culturales, utilizados cotidianamente en el medio familiar y social. Es ingenuo no tener esto en cuenta en la enseñanza y hacer como si el niño no conociera absolutamente nada relacionado con el dominio numérico al llegar a la escuela. Debemos tener en cuenta los saberes previos de los alumnos, enriquecer sus prácticas iniciales y sus procedimientos primitivos en torno al número y a su designación.

ii) Para diseñar el proceso de enseñanza, no podemos servirnos únicamente de la definición matemática de número natural y de las reglas del algoritmo de «contar», tenemos necesidad de determinar un conjunto de situaciones que permita a los niños, desde los primeros niveles educativos, encontrar las «razones de ser» del número y la numeración. Será preciso, pues, estudiar formalmente las funciones del número y de la numeración, y así construir un conjunto de situaciones donde la cardinación y la numeración jueguen una función y tengan significación.

iii) Si bien, en matemáticas, número y numeración son objetos bien distintos (el número no depende del modo como lo designamos), creemos, sin embargo, que esta distinción no es suficiente para considerar las funciones específicas de cada uno de ellos en la enseñanza de modo aislado. No podemos pensar que el número pueda aprenderse en los primeros niveles escolares independientemente de la numeración.

Estudios de epistemología y didáctica de las matemáticas como los de El Bouazzaoui[15] (1985) o Quevedo[16] (1986) dirigidos por Brousseau, ponen de manifiesto cómo las nociones de número y numeración están íntimamente ligadas. Las relaciones entre números y numeración son dialécticas. La numeración nos permite hablar de los números y representarlos, en consecuencia, debe hacerlo de una forma cómoda, eficaz y económica. Su función es designar (enunciar y escribir) los números y modelizar las propiedades de los números.

Así pues, no consideramos adecuado hablar «a priori» de funciones de la numeración y del número de forma independiente. Por ello, consideramos necesario crear situaciones que permitan describir el funcionamiento adecuado e idóneo del número junto con la numeración.

iv) Las situaciones que pueden dar significación al número y la numeración serán aquellas que den respuesta a la pregunta: **¿Para qué tenemos necesidad del número y de su designación?**

---

[15] El Bouazzaoui, H. (1985): *Étude de situations scolaires des premiers enseignements des nombres et de la numeration*. Thèse. Université de Bordeaux.

[16] Quevedo de Villegas, B. (1986): *Les situations et le processus dans l'apprentissage des nombres.* D.E.A. Université de Bordeaux.

4. ¿Para qué tenemos necesidad del número y de su designación?

En los primeros niveles de escolaridad, consideraremos fundamental proponer a los alumnos situaciones que les permitan construir con sentido las funciones[17] del número y de la numeración.

La funciones esenciales del **número** en estos niveles son:

– **Medir una colección:** asignar un número natural a una colección.

– **Producir una colección:** operación inversa a la anterior.

– **Ordenar una colección:** asignar una determinada posición a los elementos de una colección.

La **numeración**, a su vez, constituye un medio que permite:

i) Expresar la *medida* de una colección:



Con este medio de expresión podremos resolver problemas en los cuales sea necesario:

– **Verificar la conservación de una colección:** dada una única colección en dos momentos diferentes o en dos posiciones diferentes, determinar si se trata de la misma colección.

– **Administrar una colección:** a partir de una determinada colección podemos dar cuenta de los cambios que ha sufrido en el transcurso de un cierto tiempo. Se trata de *relatarlos* adecuadamente. Algo parecido al pastor de un rebaño de ovejas que debe saber cuántas ovejas le han sido confiadas, cuántas han muerto, cuántas han nacido, etc. mientras han estado a su cargo.

– **Recordar una cantidad:** recordar en un instante t_2 una cantidad que conocíamos o bien una cantidad de la que disponíamos en un instante t_1 ($t_1 < t_2$).

– **Recordar una posición:** permite evocar el lugar de un objeto en una sucesión ordenada.

– **Reproducir una cantidad:** construir una colección coordinable a una colección dada, en presencia de esta última.

– **Comparar dos colecciones** A y B desde el punto de vista de la cantidad de objetos que tiene cada una.

CAPÍTULO 4

[17] Nos hemos apoyado en los trabajos de El Bouazzaoui y Quevedo de Villegas antes mencionados.

– **Repartir una cantidad:** llevar a cabo la *división o reparto* de una colección en colecciones equipotentes (o no).

– **Anticipar los resultados de una operación:** se trata de *anticipar*[18] la acción concreta, es decir de construir una solución que nos pueda dispensar incluso de la manipulación de los objetos reales, bien sea porque los objetos no están disponibles, bien porque son demasiado numerosos y sería costosísima su manipulación. La designación del número nos permite también tener la posibilidad de *anticipar* resultados en el caso de situaciones no presentes o incluso no realizadas (es decir, simplemente evocadas), pero de las que disponemos de ciertas informaciones.

ii) *Producir* una colección: la designación del número nos permite producir una colección de cardinal dado. Sería la operación inversa de *medir* una colección. Conviene distinguir la *reproducción* de una colección de su producción. La primera se hace en referencia a una colección que sería, de algún modo, el modelo a copiar. La segunda se hace a partir de un número dado: *«dame 5 galletas»*. El poder producir la colección supone el conocimiento de este nombre («5») como modo de designación del cardinal de dicha colección.

iii) *Ordenar* una colección: la designación de los objetos de una colección por medio de los ordinales (primero, segundo, tercero, etc.) nos permite controlar el orden de la misma y determinar con precisión el lugar ocupado por cualquier objeto.

Basándonos en las funciones anteriores, señalaremos, para los primeros cursos de escolaridad, algunos grandes tipos de problemas que permiten dar sentido a los procedimientos numéricos y a las designaciones orales o escritas de los números utilizados. En referencia a estos tipos de problemas podremos construir diferentes situaciones didácticas para proponerlas a los alumnos.

4.1. Problemas de referencia para la construcción de situaciones de enseñanza

La presentación y clasificación de estos problemas no pretende adaptarse a los modelos de estructuras aditivas o multiplicativas que serán estudiadas en otro capítulo de este libro. Se trata más bien de facilitar una descripción de algunas situaciones escolares fundamentales para la iniciación a la construcción del número y la numeración.

– Problemas que permiten:

  • Verificar la conservación de una colección.

[18] El sentido del término *anticipación* ha sido explicado ampliamente en el Capítulo 2 de este libro.

- Recordar una cantidad.
- Administrar una colección.

– Problemas que ponen en juego dos colecciones[19]:
  - Construir una colección equipotente a otra.
  - Comparar dos colecciones.
  - Completar una colección para que tenga tantos elementos como otra.
  - Combinar dos colecciones...

– Problemas de referencias ordinales: para *situarse* en relación con otros niños, en relación con objetos o situaciones, para tener referencias en cuanto a su posición o a la posición de los objetos en una serie, etc.

– Problemas de *división o reparto* de una colección en colecciones equipotentes (o no), conociendo bien el número de partes a realizar (caso de una distribución, por ejemplo), o bien el valor de una parte (hacer paquetes, por ejemplo), teniendo en cuenta que se trata de controlar o de *anticipar* el resultado del reparto.

– Problemas en los que es necesario llevar a cabo *transacciones* entre objetos de valor diferente (por ejemplo, para obtener una carta roja es necesario dar tres cartas verdes, y para obtener una carta verde es necesario dar tres azules, etc. o bien cambios entre monedas, o situaciones de compra/venta, etc.), en particular cuando deben *anticipar* o controlar los resultados finales de estas situaciones.

Estas situaciones, si se plantean no únicamente como situaciones de acción, sino como situaciones de formulación y comunicación[20], permiten construir con sentido la necesidad, no sólo del número, sino de su designación, es decir, de la numeración, tanto oral como escrita.

Variables didácticas: son variables de la situación que, gestionadas por el maestro/a, provocan cambios cualitativos en los procedimientos del alumno, es decir modificaciones en su aprendizaje. Actuando sobre ellas podremos provocar adaptaciones y nuevos aprendizajes.

En el caso del número y la numeración es posible variar en las distintas situaciones:

– El campo numérico (tamaño de la colección, tamaño de los números, etc.).
– Los objetos de las colecciones (manipulables, fijos, representados, listados, etc.).
– La ubicación de las colecciones: próximas y visibles para el niño, o bien, ausentes, evocadas.
– La disposición espacial de los objetos (alineados, agrupados, encasillados, en desorden...).
– El tamaño del espacio en donde se desarrolle la situación: microespacio, mesoespacio, macroespacio (no comporta la misma actividad contar los árboles de un jardín que las canicas que hay en una cestita).
– Las reglas y consignas utilizadas por el maestro.

[19] En un principio comenzaremos por dos colecciones, ampliando sucesivamente a más colecciones.

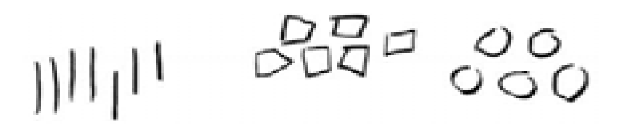
[20] Las situaciones didácticas de acción, formulación, comunicación están explicadas en el capítulo 3 de este libro.

5. Procedimientos que pueden emplear los niños para resolver los problemas

Debemos reconocer los *procedimientos* que el niño puede poner en acción para resolver los problemas anteriores, ya que todo procedimiento siempre es el indicador de la existencia de conocimientos matemáticos. Dado que existen numerosos procedimientos, y de diversa categoría, desde los más costosos hasta los más óptimos y económicos, interesa poder identificarlos «a priori» y, así, determinar los conocimientos matemáticos que ponen en funcionamiento los alumnos cuando los emplean.

Podemos señalar, entre otros, los siguientes:

i) **correspondencia término a término:** permite a los niños construir una colección equipotente a una colección dada (en presencia de ella), comparar dos colecciones presentes, efectuar distribuciones o repartos. Pueden también utilizar este procedimiento en situaciones de comunicación: dibujando la colección, haciendo palotes, señales, evocando la cantidad sobre sus dedos, etc. Las designaciones gráficas que emplean son analógicas:



Estas designaciones se pueden considerar como «numeraciones» primitivas, ya que permiten representar una colección de elementos a través de una codificación muy rudimentaria.

ii) **correspondencia «subconjunto» a «subconjunto»:** se emplea por algunos niños en las mismas tareas anteriores, cuando el tamaño de las colecciones aumenta (en lugar de establecer correspondencias uno a uno, toma varios elementos de la colección a la vez).

Estos dos procedimientos los suelen utilizar los alumnos como:

- Procedimientos iniciales, o de partida, que permiten al alumno comenzar a resolver un problema. Por ejemplo, cuando se le pide a un niño que construya una colección equipotente a una dada, él podrá, al principio, proceder a través de una correspondencia término a término.
- Procedimientos de control que permiten a los niños verificar si ha realizado correctamente una determinada tarea pedida.

iii) **estimación puramente visual:** se emplea por algunos niños en el caso de una configuración particular de objetos que pueda compararse con

otra colección presente o bien, evocada mentalmente. Este procedimiento suele ser muy poco fiable en relación con los anteriores.

iv) «**Subitizar»:** capacidad de enunciar muy rápidamente el número de objetos de una colección, por simple percepción global (sin necesidad de contar sus elementos). Se trata del reconocimiento inmediato de la cantidad, en el caso de pequeños números, –subitizar– (*«subitizing»* en inglés, *«subitus»* en latín).

v) **Contar** los elementos de una colección: para llevar a cabo el algoritmo de contar es necesario:

c_1: *Distinguir dos elementos diferentes de la colección, bien por un carácter distintivo o por su posición.*

c_2: *Reconocer la pertenencia o no de todos los elementos a la colección que se quiere contar, es decir, su propiedad característica.*

c_3: *Elegir un primer elemento.*

c_4: *Enunciar la palabra-número (o bien el sucesor del precedente en la serie numérica).*

c_5: *Poder conservar la memoria de esa elección.*

c_6: *Poder determinar el subconjunto de elementos no elegidos, o distinguir un elemento elegido de otro no elegido (no designar dos veces el mismo elemento).*

c_7: *Determinar para cada elemento elegido un sucesor, en el conjunto de elementos no elegidos.*

c_8: *Saber que se ha elegido el último elemento.*

c_9: *Enunciar el siguiente nombre-número de la serie numérica.*

c_{10}: *Saber cuando se ha terminado la tarea.*

En consecuencia, el procedimiento de contar implica:

– Saber *enumerar* los elementos de una colección.

– El conocimiento de la serie de los números (secuencia numérica).

– Asignar correctamente a cada objeto de la colección el nombre de un término de la secuencia numérica (correspondencia biunívoca).

Para *cardinar* una colección, por medio del conteo, además de las acciones anteriores, es preciso asignar al último elemento contado una doble significación, por un lado, distingue al último objeto y, por otro, representa la cantidad de todos los objetos de la colección («el cinco», «los cincos»).

El contar permite comparar las colecciones de objetos sin establecer correspondencia directa entre ellos: la secuencia numérica sirve de

intermediaria. El conteo junto con el *principio de cardinalidad* constituyen la primera actividad de medición, son el fundamento y el origen sobre los que se apoya la noción de número.

Actividad 3: ¿Cuántos cuadrados diferentes se pueden determinar en la siguiente cuadrícula?

Tras estudiar en qué consiste la actividad de contar y la de enumerar, resuelva esta tarea y analice cómo interviene el conteo y la enumeración en los posibles procedimientos de resolución.

La enumeración de colecciones en la actividad matemática

Para determinar una colección con el fin de contarla, debemos tomar las siguientes decisiones:

- Elegir un primer elemento, aplicarle una función de reconocimiento (identificación, denominación, comparación, confrontación, etc.).
- Elegir un sucesor de este primer elemento controlando qué es diferente del o de los precedentes.
- Reiterar la operación hasta que todos los elementos de la colección hayan sido señalados.

Esta operación produce un **orden total** que permite la determinación de la colección: designamos como *enumeración* a esta operación.

Enumerar una colección exige, pues, las competencias siguientes:

e_1: Distinguir dos elementos diferentes, ya sea por un carácter distintivo o por su posición. Si la situación no lo permite, no existe enumeración posible.

e_2: Reconocer la pertenencia o no de todos los elementos a la colección que se quiere enumerar, es decir, reconocer su propiedad característica.

e_3: Elegir un primer elemento.

e_4: Poder conservar la memoria de esta elección.

e_5: Poder determinar el subconjunto de elementos no elegidos, o distinguir un elemento elegido de otro no elegido (no designar dos veces el mismo elemento).

e_6: Determinar para cada elemento elegido un sucesor en el conjunto de los elementos no elegidos, es decir, elegir un primer elemento en ese nuevo conjunto.

e_7: Saber cuándo ha terminado la tarea.

Actividad 4: Una vez estudiadas las actividades de «contar» y «enumerar» una colección de elementos, determine la diferencia entre ambas.

Principios para la cardinación de colecciones

La «cardinación» de un conjunto finito es una actividad que permite asignar a un conjunto su cardinal: su número de elementos.

Según los trabajos llevados a cabo por Fayol[21] (1999), los niños, para llevar a cabo la cardinación de colecciones, necesitan poner en funcionamiento competencias que se apoyan en cinco principios:

[21] FAYOL, M. (1990, p. 66-67): *L'enfant et le nombre*. París: Delachaux et Niestlé.

P_1: Principio de estricta correspondencia término a término entre los elementos de la colección y los nombres de los números (elementos de la secuencia numérica).

P_2: Principio del orden estable, según el cual la serie del nombre de los números corresponde a una secuencia fija.

P_3: Principio de cardinalidad: en virtud del cual, tras la ejecución del algoritmo del conteo, el último término de la secuencia numérica enunciado (1, 2, 3, 4, ... **n**) corresponde al cardinal de la colección evaluada.

P_4: Principio de abstracción: la heterogeneidad (o en su caso la homogeneidad) de los objetos de una colección no tiene ninguna incidencia en la determinación de su cardinal.

P_5: Principio relativo al orden: si la cardinación de una colección nos ha conducido a un determinado número *n*, un nuevo conteo de los elementos de la colección, comenzando por cualquier otro elemento y siguiendo cualquier orden en el conteo, nos conducirá al mismo cardinal *n*.

vi) **Recontar**: cuando se adjunta a una colección otra, los niños pueden proceder para la determinación del cardinal de la colección final, contando todos los elementos, es decir, volviendo al principio (por ejemplo: «cinco y tres: una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho»).

vii) **Descontar:** procedimiento inverso del anterior, el niño cuenta hacia atrás a partir de un número dado.

viii) **Sobrecontar:** supone el conocimiento del sucesor de un número dado y la posibilidad de deducir el valor de una cantidad a la cual se adjunta uno o varios elementos.

Cuando se adjunta a una colección otra (o a un número otro número), la estrategia del «sobreconteo» supone conocer y saber enunciar la serie de los números a partir de uno dado (por ejemplo: «nueve más tres: diez, once, doce»).

ix) **Procedimientos mixtos:** establecer correspondencias por paquetes o bloques de elementos, constitución de dichos paquetes y utilización de expresiones, bien orales, o escritas de tipo aditivo (por ejemplo, dada una colección de 19 elementos, los niños podrían decir que hay 5 y 3 y 5 y 4 y 2).

x) **Procedimientos de «cálculo»**: pueden utilizar algunos conocimientos numéricos, bien memorizados, o bien algunas técnicas de cálculo, descomposiciones, transformaciones, etc., por ejemplo:

$$5 + 7 = (5 + 5) + 2 = 10 + 2 = 12 \; ; \; 8 + 6 = 8 + (2 + 4) = (8+2) + 4 =$$

$$= 10 + 4 = 14 \; ; \; 13 + 9 = 13 + (10 - 1) = (13 + 10) - 1 = 23 - 1 = 22$$

donde ponen en funcionamiento propiedades de los números naturales y de la numeración.

La resolución de problemas permitirá a los niños pasar de los procedimientos más costosos y menos fiables a los más económicos y pertinentes, desarrollando ampliamente la actividad de cardinación de colecciones.

Actividad 5: En la siguiente actividad, diseñada para que los niños lleven a cabo la actividad de enumeración de una colección, determinar las variables didácticas, los procedimientos posibles que pueden poner en funcionamiento los niños para resolverla y las diferencias con una situación de conteo.

Enumeración de colecciones: «Juego de las huchas»

Disponemos de una colección de vasos de plástico no transparentes en los que hemos hecho una ranura en la base. Los colocamos boca abajo y pedimos a los niños que tomen botones de una cestita e introduzcan un botón y sólo uno, en todos y cada uno de los vasos.

Observación: El hecho de que los vasos sean opacos impide el control visual continuo en el desarrollo de la actividad de enumeración, es decir, no podemos conocer con una sola mirada, en el transcurso de la actividad, lo que hemos realizado y lo que nos queda por realizar.

Actividad 6:

Teniendo en cuenta los procedimientos que los niños pueden poner en funcionamiento para la cardinación de una colección, podemos formularnos las siguientes cuestiones:

- ¿Puede un niño llevar a cabo la cardinación de una colección sin saber contar?
- ¿El saber contar asegura el dominio de la cardinación de cualquier colección?
- ¿Podría un niño, que conoce la secuencia numérica hasta n, no dominar la cardinación de una colección de **p** objetos, siendo **p** < **n**?
- ¿Podría un niño, que sabe contar hasta n, determinar el cardinal de una colección de p objetos, siendo **p** > **n**?

6. Situación fundamental para la cardinación de una colección mediante la actividad de contar

El conocimiento de los primeros números naturales se manifiesta por el conteo. En la vida diaria, todo el mundo sabe lo que es contar: se trata de una actividad totalmente naturalizada, que conocemos y dominamos sin ninguna dificultad. Socialmente, el contar es algo que se hace, no es algo que se explica. En el apartado anterior hemos descrito la actividad de contar, ahora vamos a determinar un modelo de situación-problema que nos permita reproducir las actividades de contar y cardinar en la escuela.

Construir una *situación fundamental*[22], para que a través de la actividad de contar determinemos el cardinal de una colección, supone definir una clase de situaciones con un cierto número de variables didácticas que, al tomar distintos valores, permita generar un conjunto de problemas característicos del contar. Serán problemas donde el contar constituya su solución óptima y que debe resolver alguien que no posee este conocimiento: que no sabe contar.

[22] La noción de *situación fundamental* se ha estudiado en el capítulo 3 de este texto.

Esta *situación fundamental* se puede modelizar con el siguiente juego: dada una cierta cantidad de objetos (por ejemplo, botes de pintura), pedimos a un niño que vaya a otro lugar, desde el que no ve los objetos anteriores, a buscar otro tipo de objetos (por ejemplo, pinceles) y que, en un sólo viaje, traiga aquellos que necesite para poner un solo pincel en cada bote sin que sobre ni falte ninguno. «Diremos que alguien sabe contar (en el sentido de la teoría de situaciones) cuando es capaz de realizar correctamente esta tarea y, aún más, cuando es capaz de pedirle a alguien la cantidad exacta de pinceles que necesita y controlar si ha llevado a cabo estas acciones correctamente». (Brousseau[23], 1995, p. 12)

Esta *situación fundamental* describe una actividad humana concreta, no un método de enseñanza. Está claro que, en cuanto modelo de actividad, también puede ser utilizado en la enseñanza. Pero su función principal es dar cuenta de las distintas actuaciones que designamos culturalmente como acciones de contar, y de las condiciones que se requieren para realizar dichas actuaciones. Por ejemplo, cuando alguien recita la serie numérica «uno, dos, tres...» no está resolviendo el problema de la situación fundamental, sólo está realizando uno de los «pasos» posibles. Si además de recitar señala con el dedo cada uno de los botes de pintura, estará más cerca de las estrategia ganadora. Si también sabe detenerse en el último número enunciado se habrá acercado aún más, etc.

Para generar los distintos tipos de problemas que designamos habitualmente como «problemas de contar», basta con modificar el valor de las variables de la situación: podemos considerar, por ejemplo, que hay un número muy reducido de botes (4 o 5) o, al contrario, un número muy alto (alrededor de 25 000); podemos suponer que los pinceles están al lado de los botes o muy alejados; que no tenemos acceso a ellos, sino que se venden por paquetes de 50; que en lugar de botes y pinceles, se trata de pollitos (en continuo movimiento) y anillas (para colocárselas), que la colección está formada por objetos muy distintos o tan iguales como los lados de un dodecaedro regular; que la colección se ubica en un macroespacio: los árboles de un bosque; o por el contrario, en un microespacio: glóbulos rojos, etc.

7. La designación de los números: la numeración

Como ya hemos indicado desde el comienzo del tema las nociones de número y de numeración están íntimamente ligadas. La numeración, acción de enunciar y de escribir los signos con los que denotamos los números, mantiene una relación dialéctica con el número: sirve para expresar y dar sentido a los números y, además, es un medio para modelizar las propiedades de los números.

[23] BROUSSEAU, G. (1995) Didactique des sciences et formation des professeurs, En Comiti, C. (Ed.) *Didactique des disciplines scientifiques et formation des enseignants.* Grenoble: IUFM de Grenoble.

Objetivos:

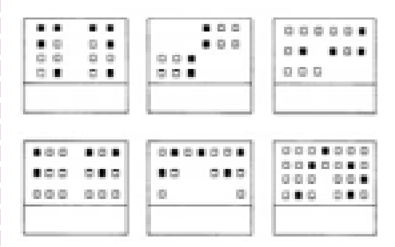
- Utilizar el número para medir una cantidad y producir una cantidad.
- Utilizar los números como instrumentos eficaces para *memorizar* una cantidad.
- Construir diferentes procedimientos de «cardinación» de colecciones.
- Construir la actividad de contar como el procedimiento más eficaz y económico para la cardinación de colecciones.
- Construir «mensajes» para designar los números en una actividad de comunicación.

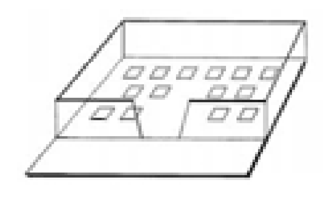
Situación: El juego del autobús[24]

Material:

- Un soporte formado por dos partes, una parte libre sobre la que se pondrán, en un primer momento, los «pasajeros» y otra parte sobre la que están dibujadas las plazas del autobús (con asientos libres y ocupados).
- Pequeños muñecos o fichas (serán los pasajeros del autobús).
- Hojas recambiables que representan la distribución de las plazas del autobús.

(En esta actividad es necesario que, en la clase, el lugar donde se encuentran los «pasajeros» esté suficientemente alejado del lugar de los «autobuses», para que, en el momento en el que los niños estén tomando los «pasajeros» no puedan ver las plazas del autobús.)





Consignas:

- **1ª** fase: Debéis de ir a buscar justo los «pasajeros» necesarios, sólo los necesarios, ni más ni menos, para completar las plazas libres del autobús.
- **2ª** fase: Debéis de ir a buscar, en **una sola** vez, justo los «pasajeros» necesarios, sólo los necesarios, ni más ni menos, para completar las plazas libres del autobús.
- **3ª** fase: Debéis pedirme por escrito, en **un mensaje**, los pasajeros que necesita vuestro autobús.

Variables didácticas:

- Número de cuadrados (plazas del autobús), elegido en función de las competencias que tengan los niños.
- Disposición espacial de los cuadrados.
- Número de viajes que pueden dar los niños para tomar los pasajeros.
- Exigencia o no de escribir un mensaje para pedir los pasajeros (tipo de comunicación).

---

[24] Adaptación de la situación propuesta en ERMEL (1990, p. 90) *Aprentissages numeriques*, París: Hatier.

Procedimientos posibles de los alumnos:

- Correspondencia uno a uno (en uno o en varios «viajes» al lugar donde se encuentran los pasajeros).
- Correspondencia subconjunto a subconjunto.
- Emplear los dedos de las manos como colección equipotente a la dada.
- Determinar un número a partir de:
  - La estimación visual y global de la colección.
  - La subitización.
  - Contar los elementos de la colección.
  - Contar subcolecciones y emplear varios números: «*dame 2 y 3 y 4*».
- Dibujos de palotes o signos gráficos que representen analógicamente los asientos del autobús.
- Expresiones escritas de los numerales de la colección.
- Otros...

Ejemplo 2. Situación didáctica para la actividad de contar: el número como *memoria* de la cantidad.

Actividad 7: «El número para ordenar»

Presentamos dos situaciones escolares cuyo objetivo es «el aprendizaje del sentido ordinal del número», tras su lectura, conteste a las cuestiones de análisis didáctico que se formulan:

Situación 1:



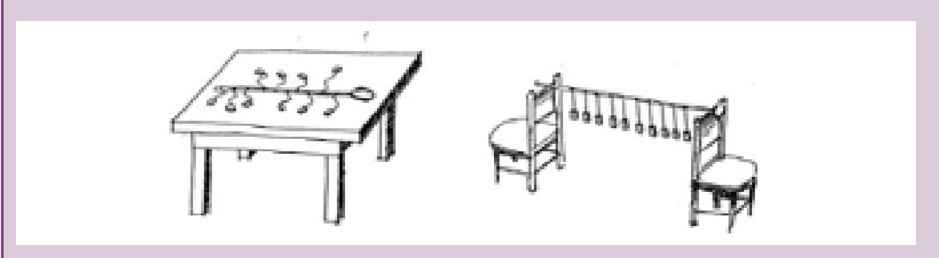
Se trata de una situación escolar en la cual el maestro presenta, en primer lugar, la ficha «Los números ordinales», para que los niños lean las frases que asignan a cada animal su ordinal y, por repetición, vayan memorizando los términos ordinales introducidos. Otro día, ampliarán estos conocimientos introduciendo más ordinales, cumplimentando fichas, como la adjunta «Ordenamos»:



- Teniendo en cuenta las hipótesis de aprendizaje estudiadas en el capítulo 2, ¿qué modelo de aprendizaje adoptan de modo implícito estas secuencias de enseñanza?
- ¿Se trata de una presentación ostensiva de los ordinales?
- ¿Qué trabajo queda bajo la responsabilidad de los niños, en las tareas escolares propuestas?
- Si el niño no «rellena» bien la ficha, ¿qué medios tiene para informarse de su error?

Situación 2: Una mañana, la maestra presenta a los niños un bastón orientado sobre el que están atadas varias cajitas de cerillas. En el interior de cada una hay colocado un objeto familiar para los niños (que puedan identificarlo y designarlo con facilidad).

Consigna: Vamos a colocar este bastón, con las cajitas abiertas, sobre una mesa. Todos podréis ver el contenido de las cajas. Al terminar la jornada, las cerraremos y, mañana, estando las cajas cerradas, debéis decirme el contenido de cualquiera de ellas. Si acertáis, entonces, ¡habréis ganado!



A la mañana siguiente, el bastón se situará entre dos sillas con todas las cajitas cerradas. Cuando un niño quiera jugar, la profesora tomará una caja cualquiera y, él debe decir el objeto que hay en su interior. La profesora abrirá la caja y, si coincide, habrá ganado. En caso de error, la profesora abrirá también la caja que corresponde al objeto designado por el niño, para que identifique correctamente el lugar que ocupa.

- ¿Qué modelo de aprendizaje se ha adoptado en esta situación de enseñanza?
- ¿Qué conocimientos matemáticos deben movilizar los alumnos para resolver correctamente la tarea?
- ¿La propia situación puede «informar» al niño sobre el éxito o el error cometido en su designación?
- ¿Qué variables didácticas puede gestionar la profesora?
- ¿Cuál es la función de los desequilibrios cognitivos que genera esta situación en los alumnos?
- Señale las diferencias, desde el punto de vista didáctico, entre las dos situaciones propuestas.

Trabajar con el número implica la necesidad de recurrir a su representación oral o escrita.

Los niños, antes de ingresar en la escuela, han mantenido múltiples relaciones con la numeración, ya que ésta existe tanto dentro como fuera de la escuela. Producto cultural, objeto social de uso cotidiano, los códigos de nuestro sistema de numeración se ofrecen a la exploración infantil desde las páginas de los libros, las camisetas de los futbolistas, las listas de precios, los calendarios, las cintas métricas, las direcciones de las casas, los teléfonos, etc. En esta etapa, cuando los niños se relacionan con las primeras estructuras numéricas, la escritura del número se asocia al número mismo, de tal manera que con frecuencia se confunden una con otra.

Pero hay que distinguir el número de su representación, el nueve puede denotarse de diversas maneras:

9, IX, «nueve», IIIIIIIII, ●●●● ●●●●●

tales designaciones representan por igual el mismo número, con las mismas propiedades (cardinal de una colección, número impar, múltiplo de tres, sucesor del

ocho, anterior al diez, divisible por tres...). El número es un objeto matemático para el que existen varios sistemas posibles de escritura; la numeración posicional de base diez es uno de ellos.

Designar para memorizar: en la vida real, tenemos necesidad de designar las cantidades de las magnitudes con las que nos relacionamos, es preciso encontrar un medio para nombrarlas, para guardar indicadores escritos que nos permitan recordarlas y, más tarde, también interpretarlas.

¿Cómo guardar los indicadores de una información cuantitativa? Existen diferentes soluciones a este problema:

El medio más primitivo consiste en construir una colección coordinable a la colección inicial utilizando objetos más simples, más estáticos: una colección de piedrecitas, una colección de palillos, de dedos, etc.

Posteriormente, la colección de piedrecitas puede ser sustituida por una colección «representada» icónicamente, siempre coordinable a la colección inicial:

Una tercera etapa nos lleva a una representación más abstracta, empleando signos que no identifican icónicamente a los objetos reales, por ejemplo: | | | | | | | | |, que conlleva un problema asociado, la dificultad para la percepción global que permita diferenciar con precisión una representación de otra. ¿Dónde hay más elementos? | | | | | | | | | o bien | | | | | | | | | |

La cuarta etapa consiste en utilizar un signo numeral, por ejemplo: IX, o bien 9.

En la cuarta etapa sólo se emplea un único signo, resolviendo, así, el difícil problema de la percepción global, ya que un solo signo designa una cantidad de elementos precisa, pero esta cuarta etapa presenta un nuevo problema: memorizar tantos signos como cantidades diferentes haya, y tantas palabras como signos, si queremos comunicarlos oralmente. Para salvar esta dificultad, a lo largo de la historia han ido surgiendo distintos sistemas de numeración. (Véase Anexo)

CAPÍTULO 4

- **El sistema de numeración como modelización de los números:** a partir de una cierta magnitud del tamaño de las colecciones, sería imposible estudiar, cuantitativamente, sus relaciones y propiedades sin un modelo que permita representarlas. Este modelo lo constituye la numeración:

  colección ⟶ numeración

  La modelización de los números por medio de la numeración permite trabajar con los números apoyándonos sólo en su escritura; de este modo, el recurso a las colecciones no es necesario. Esto hace posible, entre otros:

  – **Generar la representación de todos los números naturales** a partir de sólo diez cifras: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

  – **Comparar dos números naturales cualesquiera:** para comparar 78 y 234 es más económico indicar que 234 se escribe con tres cifras y que 78 se escribe con dos, que construir una colección de 234 objetos y ponerlos en correspondencia con una colección de 78 objetos y concluir, en consecuencia, que 234 es mayor que 78.

  – **Operar y calcular:** el cálculo oral o escrito reposa sobre la capacidad de descomponer y recomponer los números de diversas formas, de transformar las escrituras cifradas y , para ello, es necesario conocer perfectamente las propiedades de nuestro sistema de numeración. Los algoritmos de las cuatro operaciones aritméticas básicas y sus técnicas operatorias se han construido a través de los años apoyándose en la escritura posicional de los números.

  – **Reconocimiento de las propiedades de los números:** la escritura de los números permite deducir directamente muchas propiedades de los números. Por ejemplo:

- Paridad: sólo observando la última cifra.
- Divisibilidad por 3, 4, 5, 10, 9... a partir de las cifras que intervienen en la escritura.

- **Designar oralmente:** el sistema de **numeración oral** se ha construido a partir del sistema de numeración escrito, pero articulando las palabras por medio de principios aditivos y multiplicativos:

  $18 = 10 + 8 \Rightarrow$ diez y ocho ; $32 = 3 \times 10 + 2 \Rightarrow$ treinta y dos

  $8\,364 = 8 \times 1\,000 + 3 \times 100 + 6 \times 10 + 4 \Rightarrow$ ocho mil quinientos sesenta y cuatro

  La yuxtaposición de palabras supone siempre una operación aritmética, operación que, en algunos casos, es una suma (*mil cinco,* significa 1000 + 5) y, en otros casos, una multiplicación (*cinco mil*, significa 5×1000).

  Hay muchas palabras que «esconden» el principio aditivo: once, doce, trece..., otras esconden también el principio multiplicativo: veinte, treinta, cuarenta..., mientras que otras lo explicitan: ochocientos, tres mil, seis cientos mil, etc.

  El cero, en la numeración hablada, no aparece para indicar el lugar de un orden que está ausente, así, para 852 007 no decimos: ochocientos cincuenta y dos mil, *cero cientos*, *cero diez*, siete.

  Estas irregularidades son fruto de una numeración que, en su origen, fue hablada y ligada a usos eminentemente prácticos, no sustentados en un fundamento lógico, origen de la numeración escrita.

- **Designar gráficamente: la numeración escrita** es al mismo tiempo más *regular* y más *hermética* que la numeración hablada. Es más *regular* porque la suma y la multiplicación se aplican siempre de la misma manera: se multiplica cada cifra por la potencia de la base a la que corresponde y se suman los productos resultantes de esa multiplicación:

  $$5\,827 = 5 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 20 \times 10 + 7$$

  Es más *hermética* porque en ella no hay ningún rastro de las operaciones aritméticas involucradas y porque, a diferencia de lo que ocurre con la numeración hablada, las potencias de la base no se representan a través de símbolos particulares sino que sólo pueden inferirse a partir de la posición que ocupan las cifras. Cuanto más económico es un sistema de numeración menos transparente resulta. Un sistema como el egipcio es casi una traducción de las acciones de contar, agrupar y reagrupar; fue necesario ocultar estas acciones para lograr un sistema cuya economía es indiscutible.

8. Aproximación didáctica a la numeración

Existen dos concepciones didácticas diferentes para el aprendizaje de la numeración. La primera de ellas muestra una concepción que podemos denominar «por la práctica», es decir, la numeración es una práctica social que es preciso comunicar al alumno en su forma más acabada y definitiva por medio de los nombres «oficiales» que le asigna la numeración decimal de posición. Primero será necesario que los alumnos la aprendan como un lenguaje y más tarde se comprenderá el funcionamiento y las reglas sobre las que se sustenta. Los niños la adquieren, al igual que la lengua materna, por transferencia de una realidad exterior ya constituida. No obstante, en el caso de la numeración, esta comunicación está ordenada: cada palabra tienen un lugar bien determinado y no se aprenderá una palabra antes que otra. Mientras que es indiferente para cualquier niño aprender antes o después la palabra «papá» o «pipa», no lo será aprender

«29» antes que «13» o que «22». Su aprendizaje se basa en la repetición de actividades mecánicas de conteo. Esta concepción está sometida a un fuerte condicionamiento social del que la escuela difícilmente puede escapar, ya que el conteo es una práctica social en la vida corriente.

Otra concepción didáctica propone la creación de una génesis artificial de la numeración: el alumno debe comprender para qué sirve e interpretarla al mismo tiempo que la aprende. Didácticamente se considera preciso encontrar una génesis que le permita crear y comprender el concepto de numeración a la vez que va construyendo el número.

La *situación fundamental* sobre el «contar», relativa a la cardinación de colecciones, puede también permitir a los alumnos construir la necesidad de *designar* los números con sentido, para ello debemos exigirle que no sólo sea una situación de acción, sino que se caracterice también por ser una situación de comunicación-formulación. Así, en el ejemplo mostrado anteriormente, si introducimos la necesidad de expresar un mensaje, generamos la siguiente situación: dada una cierta cantidad de botes de pintura, pedimos a un niño (emisor) que *formule un mensaje*, para que otra persona que no puede ver los botes (receptor), una vez interpretado el mensaje, deba darle tantos pinceles como botes de pintura.

Puede ocurrir que esta formulación escrita sea necesaria para acordarse uno mismo de una determinada cantidad, se tratará entonces de una autocomunicación. Si es para informar a otra persona se tratará de una comunicación.

En cualquier caso, ante situaciones de formulación relativas a la cardinación de colecciones, debemos preguntarnos:

– ¿Por qué necesitamos una comunicación?
– Si es preciso disponer de una escritura: ¿qué escribimos?, ¿por qué escribimos?, ¿para recordar una cantidad?, ¿para informar a alguien?
– ¿Cuáles son los *porqués* de la escritura o la enunciación del número?

La función de comunicación es indispensable en el momento del aprendizaje del número. A partir de esta necesidad se justifica la pertinencia de la numeración como instrumento de designación de los números. Desde la escuela infantil y primer ciclo de Primaria, debemos proponer a los niños situaciones problema producidas mediante la gestión adecuada de las variables didácticas de la *situación fundamental*, para que construyan significativamente estos conocimientos. Más tarde irán construyendo los agrupamientos, las órdenes de unidades, la relatividad posicional, las reglas de lectura y escritura, etc.

Actividad 8: Algunos niños, en la fase de aprendizaje de la numeración escrita, cometen errores de escritura cuando deben interpretar una comunicación oral:

– *«ochocientos cincuenta y siete»* escriben 810057
– *«cuatrocientos treinta y dos mil cuarenta y tres»* escriben 410032100043

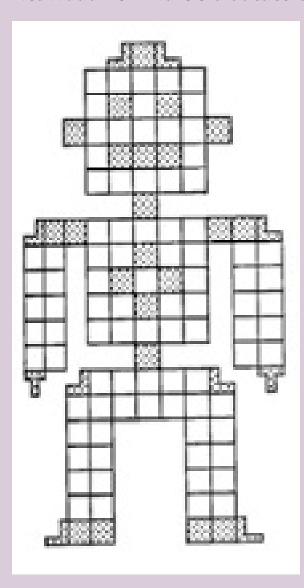
Estos errores muestran que las escrituras que se corresponden con la numeración hablada entran en contradicción con las hipótesis vinculadas a la cantidad de cifras de las notaciones numéricas.

– Revise la noción de obstáculo introducida en el capítulo 2º y determine razonadamente si la numeración hablada puede constituir un obstáculo epistemológico para la numeración escrita.

Actividad 9: Observe los siguientes errores, relativos a la numeración escrita, producidos por los niños de los primeros cursos escolares:

– *«el número siguiente de 569 es 5610»*
– *«el número anterior de 3 500 es 3 400»*
– *«el número 102 es menor que el número 89»*
– *«el número siguiente de 2 570 es 2 580»*
– Determine, desde el punto de vista didáctico, algunas de sus posibles causas.
– ¿Con qué materiales didácticos convendría que trabajasen los alumnos para superar estos errores?

Actividad 10: Análisis didáctico de una situación de enseñanza. Curso 1º de Educación Primaria.



Material:

– Un cartel con el robot según el modelo adjunto (los cuadraditos punteados están coloreados con diferentes colores)
– Una ficha con un robot, cuya cuadrícula estará totalmente en blanco, para cada grupo de alumnos.
– Cajas que contienen «pegatinas» de colores.

Consigna: «Voy a poner en vuestra mesa una ficha que tiene un robot, cada grupo debe terminarlo de modo que quede exactamente igual que el modelo. En la mesa del profesor tenéis cajas que contienen *pegatinas* de colores. Debéis pedirme por escrito en un papel las *pegatinas* que necesitéis para completar cada parte, repito, justo las precisas, ni más ni menos».

La profesora pide a cada grupo de alumnos que: uno se encargue de construir la cabeza, otro los brazos, otro las piernas y otro el torso. El cartel del robot lo ubica sobre una mesa en un extremo de la clase. Los niños necesariamente deben desplazarse para verlo y poder construir sus mensajes, pero una vez que están en su mesa, no le es accesible a la vista.

Se pide:

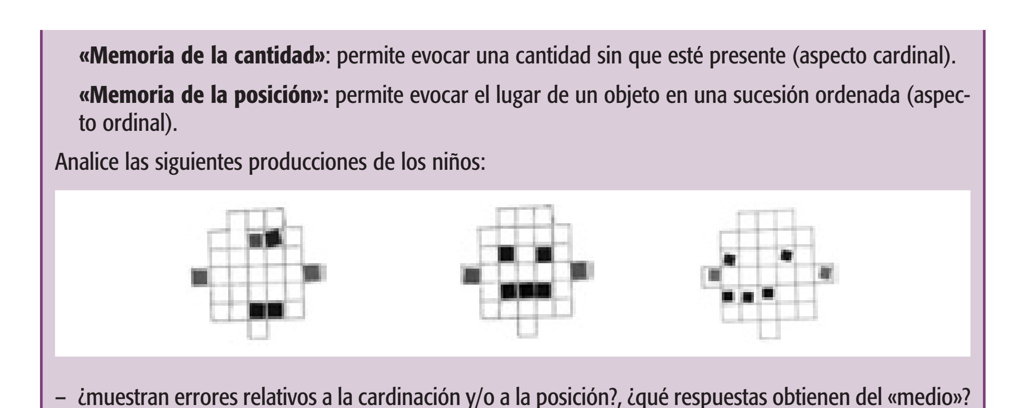
– Hipótesis de aprendizaje que se asume en esta situación de enseñanza.
– Conocimientos que deben movilizar los niños en su resolución.
– Variables didácticas de la situación y posibles procedimientos que pueden emplear los niños.
– Fases de acción, formulación-comunicación, validación.
– Sabiendo que:

El número y su designación (la numeración) tienen funciones de:

«Memoria de la cantidad»: permite evocar una cantidad sin que esté presente (aspecto cardinal).

«Memoria de la posición»: permite evocar el lugar de un objeto en una sucesión ordenada (aspecto ordinal).

Analice las siguientes producciones de los niños:



– ¿muestran errores relativos a la cardinación y/o a la posición?, ¿qué respuestas obtienen del «medio»?

9. La práctica de la numeración: materiales didácticos

En la progresión didáctica de la enseñanza de la numeración, consideramos esencial partir de situaciones didácticas derivadas de la *situación fundamental* para que los niños encuentren significativa la necesidad de las escrituras numéricas, más adelante, cuando deban construir progresivamente el sistema decimal, hemos de tener en cuenta que, para su dominio, los alumnos necesitan también llevar a cabo múltiples actividades con materiales didácticos que constituyen modelos de nuestro sistema de numeración y facilitan la interiorización de sus propiedades en los primeros niveles escolares. Veamos algunos de ellos.

Para facilitar el reconocimiento de la estructura de la serie numérica escrita, la «**banda numérica**» constituye un soporte lineal, que facilitará a los niños construir una imagen mental que apoye las propiedades del orden, crecimiento, decrecimiento, distancias entre dos números, períodos, equidistancias, infinitud, regularidades, operaciones, etc.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	84	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

El soporte «**tabla**» de dimensión $10 \cdot 10$ permite visualizar y memorizar muchas propiedades del sistema de numeración decimal que son más evidentes en la posición «vertical», por ejemplo: familias numéricas de diez elementos, períodos, estructura de las columnas y de las filas, equidistancia, orden, regularidades, operaciones, cálculo mental, etc.

Existen numerosas cuestiones que el profesor puede formular sobre estos dos soportes para permitir que los niños construyan las propiedades de la serie numérica escrita y sus reglas de escritura. Aunque en los primeros niveles de aprendizaje la decena está presente más como «período» que como agrupamiento significativo en base diez, los niños deben aprender a observar analogías en la serie numérica, aplicarlas en su recitación, escribirlas y apoyarse en ellas para desarrollar procedimientos de cálculo mental.

El material de Dienes para la base diez permite modelizar la estructura del sistema posicional, facilitando, de este modo, la comprensión de los agrupamientos regulares y de los cambios de unidades, así como el valor relativo de las cifras. Este material es también de gran utilidad para la comprensión del funcionamiento de las técnicas operatorias de los algoritmos.



Actividad 11: Determinar, en las siguientes actividades escolares, los conocimientos sobre la numeración que han de movilizar los alumnos para resolverlas.

a) Sólo disponemos de un «trozo» de la tabla numérica, debes escribir el número correspondiente a las casillas indicadas:

b) En estos «trozos» de la tabla numérica, sabiendo que el número que está dentro del recuadro siempre está bien situado, debes buscar los «intrusos», es decir, los números que no están bien ubicados.

Actividad 12: Estudie, en el anexo de este tema, los sistemas de numeración egipcio, romano y posicional (indo-arábigo) y responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

- ¿Cómo funciona el principio aditivo (o, en caso, sustractivo) en cada uno de ellos?
- ¿Cómo funciona el principio multiplicativo en cada uno de ellos?
- ¿Cuál es el origen y la significación de la cifra *cero*?
- ¿Qué operatividad facilita cada sistema de numeración en el desarrollo y ejecución de las operaciones aritméticas?
- ¿Qué funcionalidad tiene cada sistema de numeración en la determinación de las propiedades de los números: ordenación, paridad, divisibilidad, etc.?

BIBLIOGRAFÍA

BAROODY, A. (1988): *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: Visor.

BRISSIAUD, R. (1989): *El aprendizaje del cálculo*. Madrid: Visor.

ERMEL (1991): *Aprentissages numériques*. París: Hatier.

GÓMEZ, B. (1988): *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.

IFRAH, G. (1997): *Historia Universal de las cifras*. Madrid: Espasa-Forum.

KAMII, C. (1984): *El aprendizaje del número*. Madrid: Aprendizaje-Visor.

PARRA, C., SAIZ, I. (1994): *Didáctica de las matemáticas*. México: Paidos.

VERGNAUD, G. (1991): *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas.

ANEXO

Número y numeración. Elementos para su formalización matemática

Admitimos como conceptos primarios intuitivos los de *unidad*, *conjunto* y *correspondencia*, es decir, no daremos su definición y, basándonos en ellos, vamos a construir la noción de número natural.

Un conjunto A = {a, b, c, ..., m, n} está ordenado, o bien es ordenable, cuando existe un criterio que permite establecer para cada par de elementos a, b ∈ A si **a** es anterior a **b** o bien **b** es anterior a **a**.

Primer elemento de un conjunto ordenado es el anterior a todos los demás, y *último elemento* es el posterior a todos los demás. Diremos que dos elementos **x**, **y** de un conjunto son consecutivos cuando entre ellos no existen elementos

del conjunto, es decir, posteriores a uno de ellos y anteriores al otro. Si **y** es posterior a **x**, entonces se dice que *y es el siguiente de x*: y = sg. x

Construcción axiomática de los números naturales

Dedekind y Peano construyeron a finales del S. XIX una teoría axiomática del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, enunciando los siguientes principios:

i) el cero es un número natural.

ii) todo entero natural tiene un sucesor.

iii) dos enteros naturales que tienen el mismo sucesor son iguales.

iv) cero no es el sucesor de ningún número natural.

v) si una parte P de $\mathbb{N}$ contiene el cero y si el sucesor de todo elemento de P pertenece a P, entonces P es igual a $\mathbb{N}$.

Así se constituye el conjunto $\mathbb{N}$ cuyos elementos, denominados números naturales, reciben los nombres de: cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco... que representamos con los signos: 0, 1, 2, 3, 4, 5...

El conjunto de reglas y principios que permiten la expresión de los números naturales de forma sistemática y racional constituye la numeración (oral o escrita).

Números ordinales y cardinales

Diremos que dos conjuntos *A y B son coordinables (o equipotentes)* cuando entre sus elementos puede establecerse una correspondencia biunívoca, es decir, de tal modo que a cada elemento de A le podemos hacer corresponder uno y sólo uno de B y recíprocamente.

Llamaremos *sección de la serie natural de los números* a todo conjunto parcial de ellos caracterizado por las siguientes propiedades:

i) Contiene el número uno.

ii) Contiene el último elemento.

iii) Contiene el siguiente de cada elemento, excepto del último.

Todo conjunto finito es coordinable con una sección de la serie natural de los números. En esta coordinación a cada elemento del conjunto le corresponde un número natural, denominado *número ordinal* correspondiente a dicho elemento. Establecida la coordinación, a los números: 1, 2, 3, 4, 5... se les dan los nombres de primero, segundo, tercero, cuarto, quinto...

El proceso seguido para asignar a cada elemento de un conjunto finito su número ordinal se llama operación de contar.

Número cardinal de un conjunto A es el ordinal correspondiente a su último elemento. Si *n* es el cardinal del conjunto, ordinariamente suele decirse que A consta de *n* elementos.

Dos conjuntos que son coordinables entre sí, lo son con una misma sección de la serie natural y, por tanto, tienen el mismo cardinal: *todos los conjuntos coordinables entre sí tienen el mismo cardinal.*

Si con una cierta ordenación del conjunto A, éste es coordinable con una sección 1, 2, 3, 4, 5, ..., n, de la serie natural, igualmente lo será con cualquier otra ordenación. En este punto podemos considerar el siguiente principio:

Principio fundamental de la invariancia del número: El número cardinal de un conjunto es independiente de la ordenación adoptada para contar sus elementos.

Sistema de numeración: Conjunto de reglas y principios cuyo objeto es la expresión oral y escrita de los números naturales.

¿Cómo designar todos los números? Si sabemos designar por medio de signos *n* números (para *n* tan grande como se quiera) ¿Cómo designar el siguiente de *n*? La humanidad ha tratado a lo largo de la historia de dar respuestas parciales, muchas civilizaciones han encontrado el modo de representar muchos números, pero no *todos* los números, veamos, por ejemplo, algunas respuestas parciales en los dos modelos siguientes de numeraciones.

Numeración egipcia:

La civilización egipcia empleó un sistema de numeración de carácter aditivo para representar los números. Los ejemplos que siguen muestran la equivalencia entre esta numeración y nuestra numeración decimal:

= 42 209

= 120 000

= 1 422 000

= 400 003

= 121 200

= 11 110

Numeración romana:

SÍMBOLOS	Símbolos principales				Símbolos secundarios		
	I	X	C	M	V	L	D
Equivalencias	1	10	100	1 000	5	50	500

Principios:

i) Los símbolos principales repetidos consecutivamente dos o tres veces duplican o triplican su valor (como máximo se pueden repetir tres veces). Los signos secundarios no se repiten consecutivamente.

ii) Todo símbolo colocado a la derecha de otro de valor superior le suma el suyo, a no ser que vaya a su vez seguido de otro de valor mayor, en cuyo caso se aplica el principio que sigue.

iii) Los símbolos principales antepuestos a otros de valor superior le restan el suyo, debiendo tener presente las siguientes restricciones:

I sólo se antepone a V y X.

X sólo se antepone a L y C.

C sólo se antepone a D y M.

iv) Cada raya horizontal puesta sobre un símbolo o grupo de símbolos multiplica su valor por mil:

$\overline{V} = 5000$, $\overline{MDL}\text{CCCXII} = 1.550.312$

Numeración de posición: Ha sido necesario esperar muchos siglos hasta la construcción de la numeración de posición que da respuesta satisfactoria a la cuestión: ¿cómo podemos estar seguros de que podemos escribir *todos* los números, tan grandes como sean?

Principios sobre los que se sustentan los sistemas de numeración posicionales basados en el principio del valor relativo:

i) Se toma como base un número n mayor que uno y se toman n símbolos denominados cifras, para representar el cero y los números menores que la base. En nuestro sistema decimal estos símbolos son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Se llaman significativas las cifras prescindiendo del cero.

ii) El número uno recibe el nombre de unidad simple o de orden cero. Cada n unidades de un cierto orden constituyen una unidad de orden superior. En el sistema de base diez estas unidades reciben el nombre de: decenas, centenas, unidades de millar, etc.

iii) Los números mayores que la base se expresan escribiendo varias cifras, unas a continuación de las otras. La primera cifra de la derecha representa las unidades simples que contiene el número; la segunda, las unidades de primer orden contenidas en el mismo; la tercera, las de segundo orden y así sucesivamente. Este principio constituye la esencia del *valor relativo* de las cifras que representan el número: una cifra colocada a la izquierda de otra representa unidades del orden inmediatamente superior al de ésta. Así, cada cifra tiene un valor, dependiendo del lugar que ocupa. El cero representa la ausencia de unidades de un orden determinado.

Teorema: Elegido un número n mayor que uno, todo M puede expresarse de modo *único* en la forma:

$M = ln^m + kn^{m-1} + hn^{m-2} + \ldots + cn^2 + bn + a$, donde $l, k, h, \ldots, c, b, a$, representan números menores que n.

$$M = lkh\ldots cba_{(n} \rightarrow \text{expresión del número M en base } n.$$

PARTE II

LOS CONTENIDOS Y SU ENSEÑANZA

CAPÍTULO 5

El cálculo en la Enseñanza Primaria. La adición y la sustracción

ÍNDICE

Juan Miguel Belmonte Gómez

1. Introducción

Si hay algo que la sociedad identifica con las matemáticas son los conocimientos numéricos. No en vano, se trata de uno de los instrumentos intelectuales aportados por las matemáticas que más valora la sociedad. Esto se traduce también en la práctica escolar si pensamos en el tiempo que se suele dedicar al aprendizaje de los conocimientos numéricos, especialmente en la enseñanza elemental. Dentro de éstos quizá sea el cálculo el que más esfuerzos consume y su aprendizaje es uno de los recuerdos que, sin duda, están más presentes cuando uno rememora su etapa escolar.

Ahora bien, a pesar de este papel preponderante que se ha otorgado y se otorga al cálculo en la enseñanza elemental, su tratamiento didáctico no ha evolucionado lo suficiente si nos fijamos en los resultados de los trabajos de investigación en didáctica de las matemáticas.

Aunque es importante la adquisición de cierto nivel de automatismo en el uso de las distintas técnicas, no es menos cierto que se ha obstaculizado tradicionalmente el trabajo de otros tipos de cálculo (pensado y mental) que juegan un papel fundamental en la construcción de los conocimientos numéricos por parte del alumno.

En este capítulo y el siguiente revisaremos algunos de estos aspectos analizando el papel de todos los tipos de cálculo, incluyendo por supuesto la calculadora, herramienta minusvalorada en la enseñanza, tanto desde un punto de vista matemático como didáctico.

Por razones de estructura del libro, realizamos en este capítulo algunas reflexiones generales acerca de la enseñanza del cálculo, que naturalmente también corresponderán a las estructuras multiplicativas. Dejamos para el capítulo 6 algunas cuestiones, también generales, como el papel del cálculo mental y la calculadora.

Se pondrá especial interés en los errores y dificultades más frecuentes que manifiestan los alumnos en el aprendizaje del cálculo, analizando su origen y su posible tratamiento.

No olvidaremos tampoco que cuando se habla de cálculo, se habla de operaciones, cuyo significado se presenta frecuentemente de una manera demasiado simplista, o incluso se deja bajo la responsabilidad del alumno. El estudio de los distintos tipos de problemas que componen los campos conceptuales de las estructuras aditivas, en este capítulo, y multiplicativas en el siguiente, nos permitirá realizar un correcto tratamiento didáctico acerca de la construcción por parte del niño del significado (o significados) de las operaciones, paso imprescindible para un verdadero aprendizaje significativo del cálculo.

2. Objetivos

– Ofrecer un marco general sobre la enseñanza del cálculo en la Educación Primaria.

– Proporcionar los elementos adecuados para desarrollar una progresión general sobre el aprendizaje del cálculo.

– Describir el significado de las operaciones de adición y sustracción.

– Identificar los distintos problemas propios de las estructuras aditivas, indicando sus distintas posibilidades didácticas.

– Plantear distintos elementos de reflexión acerca del diseño de actividades para un correcto aprendizaje de las técnicas de cálculo aditivo y sustractivo.

– Estudiar distintas alternativas de algoritmos de cálculo que permitan una enseñanza más adaptada a las distintas singularidades en el aprendizaje de los alumnos.

3. Algunas consideraciones previas sobre el trabajo del cálculo en la enseñanza elemental

Uno de los grandes objetivos de la enseñanza elemental de las matemáticas es el de enseñar a resolver problemas. Y cuando hablamos del cálculo estamos ante una de las grandes herramientas que nos ofrecen las matemáticas precisamente para eso, resolver problemas.

Es fundamental tener esto presente siempre, ya que es fácil y frecuente preocuparse de manera prioritaria por el adiestramiento del niño en el uso de determinados algoritmos de cálculo, y poner bastante menos atención en que el niño sepa identificar dónde y por qué tiene que hacer uso de esas técnicas, lo que produce un aprendizaje vacío de significado y de dudosa utilidad, aunque sea fácilmente medible y cuantificable por otros agentes externos al ámbito escolar.

No debemos olvidar tampoco que se trata de enseñar las operaciones, no sólo el cálculo, por lo que no se puede abordar esta tarea sin un planteamiento riguroso y completo de los problemas que dan sentido a las mismas.

Por otra parte, queremos destacar que cuando hablamos de la enseñanza del cálculo, lo que intentamos es proveer al individuo de los conocimientos necesarios para que pueda decidir y ejecutar de forma autónoma el tipo de técnica que mejor se adapte a la situación particular que le exija la realización de un cálculo. Y esto sólo se consigue trabajando en la escuela los distintos tipos de cálculo: escrito, mental y con calculadora.

Cuando hablamos de técnicas de cálculo no nos referimos sólo a los algoritmos definitivos, más o menos conocidos, que nos proporcionan de manera automática cualquier resultado a partir de un repertorio limitado y prefijado. También nos referimos a otras técnicas, si cabe incompletas, que denominamos técnicas artesanales. Éstas no funcionan con la misma calidad que las definitivas, pero pueden surgir espontáneamente al comprender el significado de cualquier operación y van a jugar un importante papel en la enseñanza del cálculo. Se intentará que el alumno las haga evolucionar hasta conseguir justificar, y construir, las técnicas definitivas. Además van a suponer una información muy valiosa para el cálculo pensado: mental o escrito.

Otro aspecto a tener en cuenta es que toda técnica de cálculo va a hacer uso de unos resultados previos que se deben conocer cuando la ejecutamos: un repertorio (las famosas tablas, por ejemplo). A partir de dichos resultados y mediante diversas transformaciones la técnica nos va a permitir la obtención de otros resultados. Así pues, parte del trabajo sobre la enseñanza del cálculo va a constar de una familiarización con unos resultados que hay que ser capaz de reproducir con cierta rapidez, si queremos que las técnicas se ejecuten de manera automática. Ahora bien, este trabajo no debe ahogar las tareas escolares. Aunque ya no se oyen en las escuelas los antiguos ritmos cansinos con que muchas generaciones hemos aprendido las tablas de sumar y multiplicar, este trabajo sigue presentando a nuestro entender numerosas carencias didácticas. Se presenta normalmente descontextualizado y sin justificación, ¿por qué estos resultados y no otros? Además, la estructura tradicional de las tablas hace que el repertorio sólo se recuerde en un sentido, lo que produce posteriormente algunas dificultades en el uso de las técnicas de sustracción y división. ¿Recuerda el lector con la misma rapidez el resultado de 7+8 que el de 15-7?

Actividad 1: Revise en los libros de texto actuales la presentación del repertorio aditivo y multiplicativo (las tablas). ¿Se presentan los resultados en un único sentido?

Por último nos gustaría hacer notar la exclusividad que se presenta en la escuela a propósito de las técnicas definitivas. Se habla de la técnica de la sustracción, o multiplicación, por ejemplo. Entendemos que el trabajo con varios algoritmos de cada operación ofrece diversas ventajas:

- Permite comparar las características de cada uno de ellos, lo que mejorará el conocimiento de las técnicas.
- La utilización de otras técnicas puede suponer en algunos casos un tratamiento para corregir los errores más usuales de la técnica estándar. Así, los errores que provocan las «llevadas» en el algoritmo usual de la sustracción, pueden tratarse mediante el trabajo de la técnica de «las descomposiciones previas» (que mostraremos más adelante) que materializa, de una manera más transparente, el valor de la posición de la escritura numérica.

– Permite criticar y analizar las ventajas e inconvenientes de las técnicas más estandarizadas. ¿Estamos seguros de que son las más adecuadas?

– Amplia las posibilidades de cálculo de los niños, permitiendo que puedan elegir autónomamente la técnica en la que se sientan más seguros.

– Evita la identificación casi absoluta que establecen los niños entre operación y algoritmo de cálculo. Cuando un niño afirma que sabe sumar quiere decir casi exclusivamente que sabe reproducir la técnica usual de la adición, aunque tenga muchas dificultades para identificar las situaciones en las que va a necesitar sumar.

Actividad 2: Recoja entre los libros de texto que tenga a su alcance aquellos algoritmos de cálculo que propongan además del usual. ¿Qué conclusión obtenemos?

4. El significado de las operaciones. Los problemas aditivos y sustractivos

Cuando se pregunta de manera aparentemente ingenua «qué es sumar» una de las respuestas más repetidas suele ser: «juntar y contar». Pues bien, si juntamos y contamos, lo que estamos evitando precisamente es sumar.

La pregunta no es trivial, naturalmente. Pero la respuesta sí que muestra de manera bastante clara dos cuestiones importantes:

– Una concepción de la noción de operación sólo para describir una única situación, en lugar de una herramienta que permite anticiparse a la realidad en varios contextos. Precisamente cuando yo puedo sumar, por ejemplo, no necesito volver a contar una colección resultante de la unión de otras. Ya en Educación Infantil, esta posibilidad de calcular es uno de los aspectos del número que antes valoran los niños. Este carácter de utensilio es el que nos va a proporcionar las situaciones para la construcción del significado de adición por parte del niño.

– Una gran identificación, incluso en los adultos, de la operación (adición) con un solo contexto en el que cobra sentido: juntar o unir. Sin embargo sabemos que un concepto no cobra sentido con un único modelo de situaciones. El significado de la noción de suma no se reduce a determinados contextos en los que juntamos colecciones, responde también y puede ser utilizado en otros ámbitos.

El significado de un concepto sólo se va a construir adecuadamente a partir de una variedad de contextos donde dicho concepto va a cobrar sentido. Al identificar cómo un mismo conocimiento se presenta en múltiples situaciones, el niño podrá descontextualizar dicho conocimiento, objeto de aprendizaje, de

las singularidades y particularidades de cada contexto donde puede ser utilizado. Es entonces cuando se puede afirmar que el niño ha realizado de manera significativa un aprendizaje.

Actividad 3: Observe este problema aditivo:

«Antonio tiene 6 años más que Manuel. Si Manuel tiene 15, ¿cuál es la edad de Antonio?».

¿Podemos decir que «juntamos» algo aunque tengamos que sumar para obtener el dato que nos demandan? Investigue otros problemas aditivos que tampoco respondan a contextos de unión de colecciones. Realice lo mismo con problemas sustractivos en los que no se «quite» nada.

Así pues, para conseguir que el alumno aprenda (con el significado que acabamos de apuntar) las nociones de adición y sustracción (multiplicación y división las estudiaremos en el siguiente capítulo), es necesario comenzar enfrentándolo a distintos problemas en los que la operación que nos ocupe sea la herramienta que los resuelve.

Es por esto por lo que nos ha parecido importante mostrar brevemente[1] la clasificación de los problemas aditivos y sustractivos.

Cuando estudiamos un problema hay dos aspectos importantes a tener en cuenta: la estructura matemática o relacional de la resolución y las características de la formulación del enunciado. Aquí nos detendremos en el primero de dichos aspectos, dejando el segundo a otras aportaciones más centradas en la resolución de problemas de manera genérica (lectura de enunciados, estructura de los datos, etc.) que se tratarán en el capítulo 10.

4.1. Tipos de problemas aditivos y sustractivos

Los problemas aditivos y sustractivos no pueden ser tratados aisladamente. Como afirma Vergnaud (1990), estamos ante un mismo campo conceptual, por lo que las situaciones que componen el concepto de adición y sustracción son las mismas.

Este autor establece una muy completa clasificación de los problemas aditivos en seis tipos básicos fundamentales:

Tipo I: Composición de medidas[2]

---

[1] Para obtener más información se puede consultar VERGNAUD, G. (1985, 1990) y MAZA, C. (1989).

[2] La expresión «medida» es la que utiliza Vergnaud (1991) para describir los tipos de problemas aditivos. Se trata del resultado de una medición; esto es, un número seguido de la unidad correspondiente a la magnitud, o campo de medidas según su terminología. Así, por ejemplo, podemos hablar de 25 metros (longitud), 250 gramos (masa), 24 frutas (cantidad de elementos de una colección de frutas), etc.

Tipo II: Transformación de medidas

Tipo III: Comparación de medidas

Tipo IV: Composición de transformaciones

Tipo V: Transformación sobre estados relativos

Tipo VI: Composición de estados relativos

4.1.1. Problemas de composición de medidas (Tipo I)



Son problemas en los que dos medidas se combinan para obtener una tercera.

Responden a la siguiente situación: *tenemos en una bolsa 13 caramelos de fresa y 8 de limón. Tenemos por tanto 21 caramelos.*

La posibilidad y pertinencia de esta composición la atribuye el individuo que opera en el problema dependiendo de cada contexto. Frases tan conocidas como «no se pueden sumar peras con manzanas» carecen de sentido de manera general, ya que, es posible preguntar por el total de frutas, por ejemplo, con lo que la cantidad de manzanas y peras, que son de campos de medida distintos, pasarían a componerse y «sumarse».

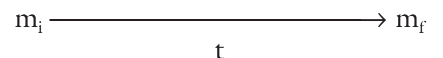
m_1 m_2 (llave) ?	«En un aparcamiento hay coches rojos y azules. Si hay 13 rojos y 6 azules, ¿cuántos coches hay?	Es el tipo de problema que plantea la adición por primera vez a los niños, desde la misma construcción del número natural.
m_1 ? (llave) M	«De los 23 alumnos de mi clase, 9 son niños. ¿Cuantas niñas hay?»	La situación es muy similar a la anterior y no presenta dificultades para entenderla. Sin embargo su solución canónica[3] hace uso de una sustracción. Ahora bien, la similitud con el problema anterior permite «prestar» su estrategia de resolución adaptándola, presentando una adición «con huecos». 9 + __ = 23

[3] La solución canónica es la que comporta los procesos más económicos, lo que no quiere decir que sean los más simples desde el punto de vista cognitivo.

De aquí surgen dos subtipos de problemas, según si preguntamos por el total o por uno de los componentes. En cada uno de ellos, la operación, o mejor dicho, el procedimiento para resolverlo es distinto.

4.1.2. Problemas de transformación de medidas (Tipo II)

En este tipo de problemas no cambiamos el campo de medidas. Se trata de fenómenos en los que se produce una modificación en el devenir cronológico de los estados de las medidas, pasando de una estado inicial (m_i) a un estado final (m_f) mediante una transformación t.



Ejemplo:

La caja de bombones tenía 28 bombones. Nos hemos comido 12. Quedan 16.

A partir de esta estructura se pueden identificar seis subtipos de problemas, dependiendo de la naturaleza de la transformación (aumento o disminución, t+ y t-) y del dato sobre el que se pregunte.

	Incógnita Estado final m_f	**Incógnita Transformación t**	**Incógnita Estado inicial m_i**
t+	Ej. 1 Eva va a hacer 75 fotocopias. Cuando va a empezar, el contador de la máquina marca 335. ¿Cuánto marcará el contador al terminar?	Ej. 2 Enrique tiene 75 globos. Se ha comprado una bolsa y ahora tiene 96. ¿Cuántos globos tenía la bolsa?	Ej. 3 El último censo de mi pueblo asegura que somos 3 546 habitantes. Si ha crecido 348 en el último año, ¿cuántos habitantes tenía hace un año?
t-	Ej. 4 Yo tenía 25 canicas en mi colección y he regalado 12. ¿Cuántas tengo ahora en mi colección?	Ej. 5 Manuel acaba de jugar a las canicas. Tenía 24 antes de jugar y ahora tiene 18. ¿Cuántas perdió?	Ej. 6 José ha sacado de su cuenta corriente 350 euros para realizar unas compras. Si después le quedan 1 625 euros en la cuenta, ¿cuánto tenía antes?

Sin tener en cuenta otros factores más generales (el tamaño de los números, la familiaridad del contexto, etc.), el grado de dificultad de estos subtipos no es homogéneo, y ésta no viene determinada necesariamente por la operación a realizar.

El razonamiento que se pone en juego en los problemas 1 y 4 es más sencillo que el de los restantes.

Ejemplo 1: *Eva va a hacer 75 fotocopias. Cuando va a empezar, el contador de la máquina marca 335. ¿Cuánto marcará el contador al terminar?*

Ejemplo 4: *Yo tenía 25 canicas en mi colección y he regalado 12. ¿Cuántas tengo ahora en mi colección?*

Basta con seguir el devenir cronológico y aplicar la transformación a los estados iniciales dados. Naturalmente en el ejemplo 4 la transformación implica una sustracción, pero como afirma Vergnaud (1991):

> «...la sustracción aparece en este esquema como una operación *sui generis*, que no supone de ninguna manera la introducción previa de la adición. Dar, perder, bajar, disminuir, etc. son transformaciones que tienen significado por sí mismas. Evidentemente, corren a la par que las transformaciones opuestas: recibir, ganar, subir, aumentar, etc., pero de ninguna manera están subordinadas a ellas. La sustracción no exige ser definida como la inversa de la adición, tiene una significación propia».

Ahora bien, un buen aprendizaje de la adición y sustracción pasa por la comprensión de su carácter inverso, aspecto que puede pasar inadvertido aunque el alumno, como indica Vergnaud, pueda resolver este tipo de problemas.

La complejidad de la resolución de los problemas 2 y 5 (la incógnita está en la transformación) es mayor.

Ejemplo 2: *Enrique tiene 75 globos. Se ha comprado una bolsa y ahora tiene 96. ¿Cuántos globos tenía la bolsa?*

Ejemplo 5: *Manuel acaba de jugar a las canicas. Tenía 24 antes de jugar y ahora tiene 18. ¿Cuántas perdió?*

Aunque en estos casos se puede heredar una estrategia de los problemas 1 y 4: basta con buscar el complemento (lo que hay que «añadir» o «quitar») simulando el devenir de la transformación.

Por último la dificultad de los problemas 3 y 6 es todavía mayor:

Ejemplo 3: *El último censo de mi pueblo asegura que somos 3 546 habitantes. Si ha crecido 348 en el último año, ¿cuántos habitantes tenía hace un año?*

Ejemplo 6: *José ha sacado de su cuenta corriente 350 euros para realizar unas compras. Si después le quedan 1 625 euros en la cuenta, ¿cuánto tenía antes?*

La resolución implica, en la mayoría de los casos, la inversión de la transformación y el cálculo del estado inicial aplicando la transformación inversa al estado final. Lo que supone ya la consideración de la relación entre la adición y sustracción y de sus contextos asociados. (Naturalmente con números pequeños, y en el caso de la transformación positiva, también sería posible resolverlos mediante la búsqueda del complemento, simulando y planteando hipótesis sobre la medida inicial).

Esos seis subtipos de problemas no son, por tanto, homogéneos en cuanto a su dificultad y ésta no viene determinada directamente por la operación, adición o sustracción, que utilice su resolución canónica.

4.1.3. Problemas de comparación de medidas (Tipo III)

Son aquellos en los que se establece una comparación, en términos aditivos, de dos cantidades, tal y como se observa en el siguiente enunciado: *tengo 15 años y mi hermana 3 menos. Ella tiene 12 años.*

Al igual que en el caso anterior, aquí también podemos contemplar 6 subtipos dependiendo del tipo de comparación (positiva o negativa) y según preguntemos por la cantidad más grande, la más pequeña o por la comparación.

Veamos dos ejemplos:

José tiene 52 caramelos, 8 menos que María. ¿Cuántos tiene María?

Corresponde a una comparación negativa, y se pregunta sobre la cantidad más grande.

Ana ha gastado 35 céntimos en golosinas e Irene 15 céntimos. ¿Cuánto más ha gastado Ana que Irene?

Estamos ante una comparación positiva y la incógnita es la misma comparación.

Actividad 4: Construya enunciados de todos los subtipos que van a surgir en esta clase de problemas. Tenga en cuenta que debe considerar todas las posibilidades correspondientes: comparación negativa o positiva, incógnita en las cantidades (en la mayor o en la menor) o en la comparación. Estudie qué operación se utiliza en la resolución canónica.

4.1.4. Problemas de composición de transformaciones (Tipo IV)

Se trata de los problemas en los que dos transformaciones se componen en una tercera resultante de las otras dos.

Ej.: *Pedro tiene una hucha con dinero. Esta mañana sacó 18 euros para comprar un libro. Por la tarde metió 15 euros que le dio su tía. El balance final del día es una disminución de 3 euros en su hucha.*

La variedad de subtipos que puede generar esta estructura es bastante amplia, dependiendo de que la incógnita sea una de las transformaciones o la resultante, el signo de las transformaciones, y el valor absoluto de la transformación incógnita en el caso de que las transformaciones que se componen tengan distinto signo.

Sin realizar una descripción exhaustiva veamos algunos ejemplos que muestran la diferente dificultad de los distintos subtipos:

- *Ana ganó 15 canicas esta mañana y también jugó por la tarde. Al acabar el día resultó que había perdido 5 en total. ¿Qué paso por la tarde?*

- *Esta mañana he perdido 8 canicas y por la tarde gané 13. ¿Cuál ha sido el balance del día?*

Actividad 5: Construya enunciados de todos los subtipos que van a surgir en esta clase de problemas. Considere todas las posibilidades en cuanto al carácter de las transformaciones componentes y de la compuesta. Analice los dos ejemplos precedentes.

4.1.5. Problemas de transformación sobre estados relativos (Tipo V)

Una transformación actúa sobre un estado relativo[4] para dar lugar a otro estado relativo.

Antonio le debía 13 canicas a Juan. Le dio 6. Ahora le debe 7.

Aquí nos encontraremos en principio las seis clases del tipo segundo estudiadas antes, pero con mayor número de casos debido al carácter (positivo o negativo) de los estados relativos inicial y final.

4.1.6. Problemas de composición de estados relativos (Tipo VI)

Nos encontramos aquí con dos estados relativos que se pueden componer, no se transforma uno en otro.

Ignacio le debe 8 canicas a Manuel y éste 14 a Ignacio. Luego Manuel le debe 6 a Ignacio.

Aquí aparecen las dos clases correspondientes al primer tipo de composición de medidas, pero obviamente con más subclases debido a la distinta naturaleza de los estados relativos (positivos o negativos).

Actividad 6: Construya enunciados de todos los subtipos que generan los problemas de transformación sobre estados relativos y de composición de estados relativos.

[4] Llamamos aquí estado relativo al resultado de una relación (estado de cuentas entre las canicas de dos niños, por ejemplo). Matemáticamente deberían ser representados con un número entero, que comporta un signo: positivo o negativo. Ahora bien, los enunciados y resoluciones de estos problemas pueden ser abordados sólo con números naturales. El contexto marcará el carácter, positivo o negativo, de las cantidades que entran en juego. Es por esto por lo que estos problemas pueden ser trabajados por los niños, sin necesidad de manejar explícitamente los números enteros.

Actividad 7: Analice la presencia de los distintos tipos de problemas aditivos en los libros de texto. Estudie si se presenta una variedad suficiente de tipos de problemas o si, por el contrario, se abusa de determinados tipos.

Con esto esperamos haber mostrado algunas pistas acerca de los problemas que hay que presentar al alumno para que realice correctamente el aprendizaje de las operaciones de adición y sustracción. Para que la construcción del sentido de la adición y la sustracción no se produzca de una manera sesgada y simplista, debemos preocuparnos de que el alumno se enfrente a una variedad de situaciones, teniendo en cuenta los distintos tipos antes estudiados.

En lo que respecta a la dificultad de los distintos tipos de problemas, nos parecen bastante ilustrativos los resultados presentados por ERMEL con 153 alumnos de CE1[5].

Como se observa cuando se trata de obtener el dato final de una transformación (problemas 1 y 2) o el resultado de componer dos medidas (problema 5) el éxito es importante (cerca del 70%) aunque, como en el segundo problema, el procedimiento canónico sea la sustracción en lugar de la adición. Además la dispersión de los procedimientos utilizados es menor, lo que indica que el niño identifica mejor el procedimiento óptimo. Sin embargo cuando se trata de obtener el estado inicial de una transformación (problema 3), o el valor de la transformación (problema 4), o se trata de evaluar una comparación (problemas 7 y 8), el porcentaje de éxitos es bastante inferior, observándose una gran dispersión de los procedimientos, lo que indica una mayor dificultad en la identificación del proceso óptimo de resolución.

Unos resultados muy recientes[6] obtenidos en Educación Secundaria parecen ofrecer datos coherentes con los anteriores. Ante problemas de composición de medidas y de obtención del dato final tras una transformación, el índice de éxitos está cercano al 95%. Las comparaciones arrojan una tasa cercana al 80%. Si se trata de una composición de transformaciones las tasas bajan bruscamente: cerca del 70% si se trata de obtener una de las medidas que se transforman, y el 50%, o incluso el 20%, si se trata de calcular el valor de alguna de las transformaciones.

Ahora bien numerosos problemas aditivos resultan de la combinación en un único enunciado de varios tipos de problemas. Su resolución pasará entonces por descomponer todos los procesos del enunciado en los problemas simples que lo conforman.

---

[5] Resultados extraídos de ERMEL (1993, 121). CE1 corresponde con el 2º curso de Educación Primaria en el Sistema Educativo Español.

[6] Datos obtenidos de un trabajo sin publicar realizado por Sagrario Simarro, Profesora del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, con 50 alumnos de 1er curso de Educación Secundaria (12 años) en el año 1998.

Enunciado	Tipo (en mayúsculas el dato incógnita)	Tasa de éxito	Procedimientos utilizados por los alumnos	
Problema 1 *El contador de la fotocopiadora marca 132. La maestra hace 16 fotocopias. Ahora, ¿cuánto marcará el contador?*	mi t+ Mf	65%	Adición Sustracción Adición con huecos Uso del conteo Otros	68% 15% 1% 6% 10%
Problema 2 *Corinne tiene 37 cromos en una caja. Pega 12 en su álbum. ¿Cuántos hay ahora en la caja?*	mi t- Mf	66%	Adición Sustracción Adición con huecos Uso del conteo Otros	21% 61% 3% 4% 11%
Problema 3 *Pablo juega a la oca. Su ficha está sobre una casilla azul. Avanza 14 casillas y llega a una casilla roja marcada con el 37. ¿Cuál era el número de la casilla azul?*	Mi t+ mf	43%	Adición Sustracción Adición con huecos Uso del conteo Otros	36% 36% 3% 5% 18%
Problema 4 *La maestra tiene 42 cuadernos en el armario. El director le da una caja de cuadernos. Ahora tiene 67 cuadernos en total. ¿Cuántos cuadernos le ha dado el director?*	mi T+ mf	39%	Adición Sustracción Adición con huecos Uso del conteo Otros	45% 15% 14% 5% 21%
Problema 5 *En un colegio hay 68 chicas y 52 chicos. ¿Cuántos estudiantes hay en el colegio?*	m1 m2 M	73%	Adición Sustracción Adición con huecos Uso del conteo Otros	88% 3% 0% 1% 8%
Problema 6 *En una clase hay 28 alumnos. La maestra cuenta los niños. Hay 12. ¿Cuántas niñas hay en la clase?*	m1 M2 m	56%	Adición Sustracción Adición con huecos Uso del conteo Otros	30% 31% 10% 8%+ 21%
Problema 7 *Marcos tiene 38 canicas y Pedro 25. Marcos tiene más canicas que Pedro. ¿Cuántas tiene más?*	m1 C+ m2	47%	Adición Sustracción Adición con huecos Uso del conteo Otros	36% 29% 8% 10% 17%
Problema 8 *María tiene 39 años; tiene 23 años más que su hijo Tomás. ¿Cuál es la edad de Tomás?*	m1 c+ M2	45%	Adición Sustracción Adición con huecos Uso del conteo Otros	23% 49% 4% 5% 19%

Actividad 8: Descomponga el siguiente problema aditivo en todos los problemas simples que intervienen:

«El marcador del depósito de combustible de la calefacción de la vivienda de Federico marcaba a principio del mes de diciembre 576 litros. Él pensaba consumir unos 1 500 litros durante el mes por lo que hizo que le suministraran 1 000 litros. Durante la primera semana gastó 210 litros. Durante la segunda 35 litros menos y durante la tercera 120 litros más que entre las dos primeras. Al acabar el mes, observó que había gastado 128 litros menos de los previstos. ¿Cuál fue el consumo de la última semana?»

5. La enseñanza de las técnicas de cálculo

Después de hacer un breve repaso acerca de los problemas que dan sentido a las operaciones de adición y sustracción nos ocuparemos ahora de uno de los aprendizajes que tradicionalmente más tiempo han ocupado en la práctica escolar: las técnicas de cálculo.

Como ya se apuntó al principio el trabajo con los algoritmos definitivos de cálculo debe suponer una culminación de todo un proceso, después de que el alumno construya y haga evolucionar distintas técnicas que llamaremos artesanales[7]. De esta manera el alumno es protagonista de sus aprendizajes, realizándolos de manera significativa.

Desgraciadamente, no podemos decir que esto se desarrolle hoy así. Hoy siguen siendo vigentes los reproches de Baroody (1988, 53):

> «Se exige que los niños memoricen datos, definiciones, procedimientos de cálculo, técnicas de medición, etc. Cuando los recursos son limitados y las clases grandes, la enseñanza y la práctica repetitiva de datos y técnicas son más manejables que el fomento del conocimiento conceptual y la aptitud para el razonamiento. Por ejemplo, enseñar paso a paso el algoritmo para la sustracción de números de varias cifras con acarreos resulta más fácil que construir la red de relaciones que constituye el conocimiento de los órdenes de unidades. Más aún, el conocimiento de datos y técnicas es más fácil de observar y comprobar que el conocimiento conceptual o la capacidad de razonamiento. Como el cultivo y la evaluación de la comprensión matemática, el razonamiento y la resolución de problemas son difíciles, la educación masiva se centra en la enseñanza y la evaluación de datos y técnicas matemáticas.»

Normalmente, tras presentar al niño la nueva operación en algunos contextos más o menos físicos, se pasa a la repetición de ejercicios de datos numéricos y técnicas algorítmicas sin prestar atención a la necesidad que tienen los niños de dedicar un tiempo importante a la aritmética informal.

Aritmética informal que va a jugar un papel fundamental no sólo en el aprendizaje de las técnicas de cálculo definitivas, sino también posteriormente en las situaciones que requieran cálculos, fuera ya del ámbito escolar.

[7] Llamamos técnica de cálculo artesanal a aquella que no es definitiva ni general, como los algoritmos usuales por ejemplo, y que tiene todavía carencias, de economía o de dominio de aplicabilidad. Están muy relacionadas con la aritmética informal que defiende Baroody.

Con el objetivo de que se produzca un aprendizaje significativo del cálculo, Baroody (1988) presenta las siguientes recomendaciones a propósito del desarrollo de la aritmética informal:

1. Desarrollar una base sólida (comprensión informal) antes de introducir símbolos escritos, de manera que la matemática más formal pueda conectarse con algo significativo.

2. Estructurar experiencias informales de cálculo para fomentar el aprendizaje por descubrimiento. Las técnicas definitivas, por su carácter automático, no están diseñadas para ser aprendidas. La justificación de muchos de sus procesos sólo será posible en el alumno si las relaciona con determinadas técnicas informales o artesanales.

3. Ayudar a los niños a ver que el simbolismo formal es una expresión de su conocimiento informal. Y no sólo es una expresión, sino que es una importante ayuda en su progresiva mejora de las estrategias informales de cálculo. Además, disponemos de un gran aparato para calcular (calculadora) que nos exige un lenguaje específico, cuya adopción nos proporcionará grandes ventajas.

4. Estimular la comprobación de los cálculos escritos contrastando los resultados obtenidos con ellos con los obtenidos mediante procedimientos informales. El cálculo escrito automático no es vigilante de sus propios errores, precisamente por su automatismo. La costumbre de controlar mediante procedimientos informales los resultados surgidos de técnicas automáticas complementa precisamente éstas técnicas, además de establecer siempre puentes entre los procesos algorítmicos y las técnicas artesanales propias y significativas.

5. La enseñanza de apoyo debe centrarse en estimular la comprensión del procedimiento correcto además de su aprendizaje. El hecho de repetir una técnica que genera problemas en algunos alumnos no suele aportar buenos resultados. Los errores sistemáticos van siempre asociados a lagunas en la comprensión de los procesos de las técnicas.

6. Prever la necesidad de un período largo para el cálculo y el descubrimiento. Parece obvio que tras lo que se ha dicho es necesaria la previsión de una cantidad importante de tiempo para la construcción significativa de las técnicas de cálculo. Los aparentemente rápidos resultados que se obtienen tras introducir prematuramente las técnicas definitivas, sin respetar un proceso laborioso previo de trabajo con aritmética artesanal, se han revelado inconsistentes y sobre todo producen aprendizajes memorísticos no significativos.

A propósito de la necesidad de trabajar aritmética informal, son interesantes las aportaciones de C. Kamii (1985, 1989 y 1994) sobre la necesidad de que los niños *reinventen la aritmética*, parafraseando los títulos de sus libros.

«¿Por qué queremos que los niños reinventen la aritmética? Los algoritmos de hoy son el resultado de siglos de construcción por parte de matemáticos adultos. Al tratar de transmitir de una forma prescrita los resultados de siglos de reflexión por parte de personas adultas, privamos a los niños de la posibilidad de pensar por su cuenta. Los niños de hoy inventan los mismos tipos de procedimientos que inventaron nuestros antepasados y necesitan pasar por un proceso similar de construcción para llegar a ser capaces de comprender los algoritmos de los adultos.

Los primeros métodos de los niños son indiscutiblemente ineficaces. Sin embargo, cuando los niños tienen libertad de pensar por su cuenta, inventan procedimientos cada vez más eficaces, como hicieron nuestros antepasados. Cuando tratamos de que los niños pasen por alto el proceso constructivo, les impedimos comprender la aritmética.» (Kamii, 1994, 47).

Pero Kamii no plantea esta necesidad por simples cuestiones de aprendizaje. Su planteamiento es mucho más radical, asegura que la enseñanza de los algoritmos es perjudicial en sí misma. Lo fundamenta en tres razones:

1. Los algoritmos fuerzan a los niños a renunciar a su propio pensamiento numérico.
2. Los algoritmos *malenseñan* el valor de la posición e impiden que los niños desarrollen el sentido del número.
3. Los algoritmos hacen que los niños dependan de la distribución espacial de las cifras (o del papel y el lápiz) y de otras personas.

Estas afirmaciones las sustenta sobre unos resultados que, desde luego, parecen bastante aleccionadores. Se recogieron los resultados de una operación (adición o sustracción) calculados por los niños de tres clases. Una de ellas pertenecía a un profesor que enseñaba los algoritmos, y las otras dos, no. Entre estas dos últimas había una diferencia, en la clase denominada «sin algoritmos» el profesor impedía también que éstos fueran mostrados por los padres. Los resultados obtenidos quedan reflejados en la siguiente tabla.

Operación	Curso	Porcentajes de éxito		
		Con algoritmos	Algunos algoritmos	Sin algoritmos
7+12+186	Segundo	12%	26%	45%
6+53+185	Tercero	32%	20%	50%
504 -306	Tercero	38%		74%
504 -306	Cuarto	29%		80%

Se observan claramente las dificultades de utilización de técnicas alternativas en los niños de la clase «con algoritmos», al plantear la operación de manera horizontal, mientras que los niños de las otras clases disponen de procedimientos que se adaptan a este tipo de situaciones. Parece que los niños «con algoritmos» no saben interpretar el valor de la noción de posición, que queda totalmente implícito en las técnicas usuales. Sin embargo en el caso de la sustracción, que

viene planteada recordando ya la técnica algorítmica, se trata de dos números que ponen de manifiesto las dificultades de su aplicación.

Según Kamii, los algoritmos tradicionales provocan que el niño trabaje con las distintas columnas (órdenes de unidades) de manera aislada, olvidando la relación entre ellas. Por esto, la técnica usual de la sustracción puede provocar con estos números (504-306) un número importante de errores, superior desde luego a los alumnos que utilizan otras técnicas alternativas.

¿Debemos entonces renunciar a plantear los algoritmos aritméticos en clase? Desde luego esta pregunta no tiene una fácil respuesta, pero entendemos que quizá sea necesario plantearla para provocar una reflexión desprovista de los numerosos prejuicios que la ahogan.

Con el fin de presentar una aproximación a la respuesta, vamos a enunciar otras preguntas que entendemos que pueden ayudar a organizar el trabajo en el aula con los algoritmos de cálculo.

- *¿Cuál es la calidad de los algoritmos aritméticos usuales que se presentan en la enseñanza elemental?* ¿Su automatismo es aceptable?

Resnick y Ford (1990) lo estudian desde el punto de vista del procesamiento de la información. Casi todos los psicólogos trabajan bajo el supuesto de que este procesamiento lo realiza la mente humana en una serie de memorias, cada una de las cuales permite un almacenamiento y un procesamiento distintos. La primera es la llamada icónica, que se limita a registrar las informaciones percibidas por los sentidos, manteniéndolas durante un período muy corto de tiempo (un segundo aproximadamente). Si los demás componentes del sistema de la memoria no recogen la información, ésta se pierde. Es la memoria de trabajo la que se encarga de recogerla, y es aquí donde se realiza el proceso de pensar, donde se realizan las operaciones sobre la información. El tercer componente es la memoria a largo plazo, que guarda lo que sabe una persona.

La memoria de trabajo juega un papel fundamental dentro de este sistema. Es la única que puede recoger la información que, a través de los sentidos, transmite la memoria icónica. Además, para que la información almacenada en la memoria a largo plazo pueda intervenir en alguna operación intelectual, debe ser transferida a la memoria de trabajo.

Ahora bien, esta memoria de trabajo está limitada por la cantidad de información que puede procesar en un momento dado. Si la memoria está llena y aparece nueva información, el riesgo de perder alguna de la antigua es importante. La información que se pierde es aquella que lleva más tiempo sin recibir atención. Cuando ejecutamos un algoritmo de cálculo hay que distinguir dos aspectos. El repertorio aprendido y que hay que movilizar, y el proceso que marca el tratamiento que hay que realizar a dicho repertorio. Para conseguir cierto automatismo y fiabilidad es necesario que la memoria de trabajo no esté pendiente de la movilización de los resultados previos, ni de los procesos que tiene que realizar.

¿Qué ocurre entonces en una sustracción que provoque una doble llevada?

¿Es un buen algoritmo? La posibilidad de que la memoria de trabajo se sature es alta. ¿Merece la pena adiestrar directamente en este algoritmo?

Actividad 9: ¿Es útil la técnica usual de la sustracción para realizar este cálculo 38 746 - 17 998? ¿Cómo se podría obtener con más seguridad y economía?

Busque algunos cálculos más en los que no es especialmente ventajoso el uso del algoritmo usual.

- *¿Cuál es la frecuencia de uso de las técnicas usuales de cálculo escrito en las situaciones en las que un individuo medio debe realizar un cálculo?*

Si realmente esta respuesta nos determinara la necesidad de enseñar los algoritmos usuales, no creemos que los mantuviéramos mucho en los currícula. El objetivo esencial de la enseñanza del cálculo es el de proporcionar al alumno conocimientos suficientes para que éste, de forma autónoma, pueda elegir el procedimiento de cálculo que mejor se adapte a las distintas situaciones en las que tenga la necesidad de realizar algún cálculo.

De esta manera los algoritmos de cálculo escrito deben suponer una opción más de cálculo, junto con el cálculo pensado[8] (mental o no) y la calculadora. No son, ni mucho menos, las únicas técnicas, ni tampoco las mejores.

- *¿Qué aportan las técnicas de cálculo escrito al aprendizaje en general de los conocimientos numéricos?*

Como ya apuntaba Kamii (1994) el aprendizaje de las técnicas algorítmicas de cálculo no sólo no ayuda al conocimiento del número, sino que puede empeorar determinados aspectos, como por ejemplo el valor de la posición.

Además debido al carácter automático de los algoritmos, su ejecución «esconde» todas las propiedades que los justifican. El trabajo con otras técnicas no automáticas, que requieren la vigilancia del ejecutor, obliga a considerar de manera explícita las propiedades de las operaciones y de los sistemas de numeración en que se basan.

Aun así, nuestra postura no es radicalmente opuesta a que se trabajen los algoritmos de cálculo en la Educación Primaria. Nos oponemos, sin embargo, a que su trabajo sea el centro de la mayoría de las actividades de cálculo en la escuela. La construcción de las técnicas algorítmicas deberá ser fruto de una evolución de distintas técnicas artesanales o informales. Sólo así evitaremos que los algoritmos de cálculo tengan los efectos no deseables que se han apuntado más arriba.

Tampoco ocultamos que, además de que nuestro actual currículum de matemáticas en Educación Primaria lo contemple, es una tarea propia de las

[8] Aunque en el capítulo siguiente nos detendremos en el cálculo pensado, queremos aquí señalar que nos referimos al cálculo que no es automático y que, por tanto, no sigue procesos algorítmicos, independientemente que pueda ser escrito o mental.

matemáticas la obtención de diversos automatismos mentales que permitan resolver de manera autónoma los problemas. Ahora bien, la autonomía en la resolución de problemas y en el uso de técnicas aritméticas sólo se conseguirá con un aprendizaje significativo de las técnicas de cálculo.

6. La enseñanza de los algoritmos de adición y sustracción

Queremos comenzar diciendo que tradicionalmente el aprendizaje del cálculo aditivo y sustractivo se realiza de manera demasiado separada. Precisamente el considerar la sustracción y la adición como dos operaciones independientes puede ofrecer buenos resultados al principio, sobre todo con algún tipo de problemas (recuérdese lo reseñado en el apartado dedicado a los problemas aditivos y sustractivos). Pero tanto a nivel conceptual como en lo referente al cálculo, esta aparente independencia no reporta ningún beneficio.

Las primeras técnicas para obtener resultados de problemas aditivos y sustractivos son aquellas que están ligadas al conteo. Pensemos que estas operaciones son las primeras que el alumno va a manejar, y aparecen ya en la construcción del número como una de sus utilidades más importantes. Hablamos de técnicas como el sobreconteo, deconteo o doble conteo[9].

Ahora bien, estas técnicas deberán ser abandonadas progresivamente para ser sustituidas por otras más propias del cálculo. ¿Qué queremos decir con esto?

Básicamente todas las técnicas de cálculo tienen un esquema común, disponen de un repertorio de resultados previo y, cuando van a obtener un resultado que no está en dicho repertorio, transforman los números hasta que pueden utilizar el repertorio.

Así, para realizar la adición 35 + 41 según nuestra técnica usual, se necesita conocer previamente los resultados 3 + 4 = 7 y 5 + 1 = 6. De esta manera procedemos:

$$\begin{array}{r} 35 \\ +\ 41 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 30 + 5 \\ +\ 40 + 1 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 30 + 5 \\ +\ 40 + 1 \\ \hline 70 + 6 \end{array}$$

$3 + 4 = 7$ ↗ ↖ $5 + 1 = 6$

[9] El sobreconteo consiste en ir contando a partir de un número tantas veces como indique el otro que queremos sumar. Así para obtener 8 + 4 contamos «9, 10, 11 y 12», (cuatro más a partir del 8). En el caso de la sustracción, el deconteo es el proceso similar pero contando hacia atrás: para calcular 8 – 3 contamos «7, 6, y 5». El doble conteo es más complejo y consiste en llevar dos conteos paralelos. Para obtener 13 + 9 contamos 14 (1), 15 (2), 16 (3),......., 20 (7), 21 (8) y 22 (9). Contamos a partir de 14 y en paralelo contamos del 1 al 9. El número que enunciemos junto al 9 será el resultado buscado en este caso.

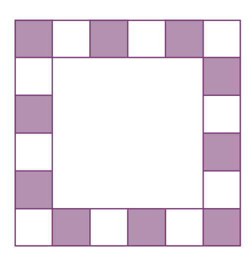
Actividad 10: Determine el repertorio necesario para el funcionamiento de las técnicas usuales de adición y sustracción. ¿Qué hecho determina dicho repertorio?

Esto nos proporciona ya una línea de trabajo en el aula: actividades encaminadas a establecer, aumentar y estructurar un repertorio de resultados aditivos (huelga decir que este repertorio es el mismo para los cálculos sustractivos).

Para ello son interesantes las actividades denominadas de «número diana», que consisten en obtener un número a partir de otros. Actividades similares al clásico juego de naipes de «la escoba» son muy adecuadas. Entendemos que la simple memorización de las llamadas «tablas», además de resultar actividades muy aburridas, ofrecen una presentación de los resultados un tanto sesgada. Un repertorio estructurado y comprendido siempre será más fácil de automatizar. Aun así puede requerir un cierto tiempo.

Existen muchos modelos de juegos que pueden ayudar a que el trabajo se pueda desarrollar en mejores condiciones. A título de ejemplo veamos el siguiente extraído de APMEP (1985):

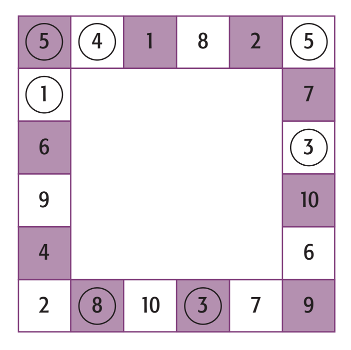
Se dispone de una colección de diez fichas numeradas del 1 al 10 y el siguiente tablero:



Reglas:

1. Cada jugador coge sus números. Uno jugará sobre las casillas blancas y el otro sobre las sombreadas.
2. Por turno cada jugador coloca una de sus fichas en una de sus casillas libres.
3. El juego se termina cuando ambos han colocado todos sus números.
4. Se considera realizado un encuadramiento cuando un número es igual a la suma o resta de los dos que lo rodean.
5. Gana quien, al terminar, ha obtenido más encuadramientos.

En el siguiente juego han ganado los negros ya que han encuadrado cuatro, mientras que los blancos sólo tres:



Actividad 11: Analice los resultados que moviliza el juego descrito antes. ¿Cómo los estructura?

Por lo que respecta al repertorio queremos hacer algunas consideraciones:

– No se debe limitar al clásico (tablas de sumar). La determinación de este repertorio vendrá marcado por la influencia de las características del sistema de numeración en los algoritmos de cálculo, pero cuando se tenga que utilizar otras técnicas de cálculo, pensado por ejemplo, es importante disponer de otros resultados.

– El repertorio aditivo es el mismo que el sustractivo. ¿Por qué genera más dificultades su movilización en la sustracción que en la adición? Esto es debido a que la presentación de las «tablas» y la consiguiente memorización se realiza siempre en un sentido:

7+1=8
7+2=9
7+3=10
7+4=11
7+5=12
....

Es importante que manejen tablas como las siguientes de manera que el repertorio sea movilizado en los dos sentidos facilitando, entre otras cosas, el automatismo de las técnicas de la sustracción.

9
1+8
2+7
3+6
4+5

13
1+12
2+11
3+10
5+8
6+7

– Es especialmente útil la adquisición del repertorio correspondiente a las descomposiciones aditivas de 10 y 5. Al ser nuestro sistema de numeración decimal conocer los complementos hasta 10 va facilitar la obtención de determinados resultados:

$$8+7=8+2+5=10+5=15$$

– Igualmente el trabajo con complementos de decenas, centenas u otras unidades completas permite automatizar un repertorio que será de gran utilidad en otros tipos de cálculo, así como en situaciones de cálculo aproximado.

28 + 35 + 72 + 15

100 + 50

150

– Hay resultados que presentan más facilidad de recuerdo por parte de los niños: los dobles y sus proximidades son algunos de ellos. Los cálculos que necesiten de este repertorio son susceptibles de generar técnicas informales de cálculo.

$$8 + 9 = 8 + 8 + 1 = 16 + 1 = 17$$

Como ya dijimos, para realizar un cálculo, transformamos los números hasta que identificamos cálculos que disponemos en nuestro repertorio. Estas transformaciones, como no puede ser de otra forma, se basan en las propiedades de las operaciones y del sistema de numeración.

Actividad 12: Reflexione el lector acerca de las transformaciones que realizamos cuando sumamos o restamos dos números. ¿Qué propiedades las justifican?

Esto nos ofrece otra pista para el diseño de actividades para el aula. Si queremos producir un aprendizaje significativo de las técnicas de cálculo, debemos conseguir que el alumno se familiarice con el uso de las propiedades que proporcionan herramientas para transformar cálculos en otros más sencillos, de cuyos resultados disponemos.

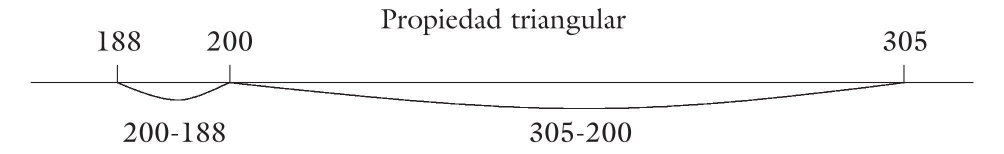
El aprendizaje de estas propiedades del cálculo se realiza naturalmente sobre las escrituras. Es importante entonces prever actividades que permitan que el alumno se familiarice con las escrituras aditivas y sustractivas. Con esto se pretende un doble objetivo:

– Dar significado a escrituras como $a + b = c$, $a + b + c = d$ y $a - b = c$, de manera que puedan suponer instrumentos para pensar, discutir o simbolizar la realidad.

– Asegurar un cierto control sobre las reglas *sintácticas* de las escrituras matemáticas, que pueden favorecer la construcción de nuevas estrategias de cálculo. Aunque nos repitamos, este trabajo será estéril si las reglas *semánticas* que justifican la sintaxis no han sido adquiridas.

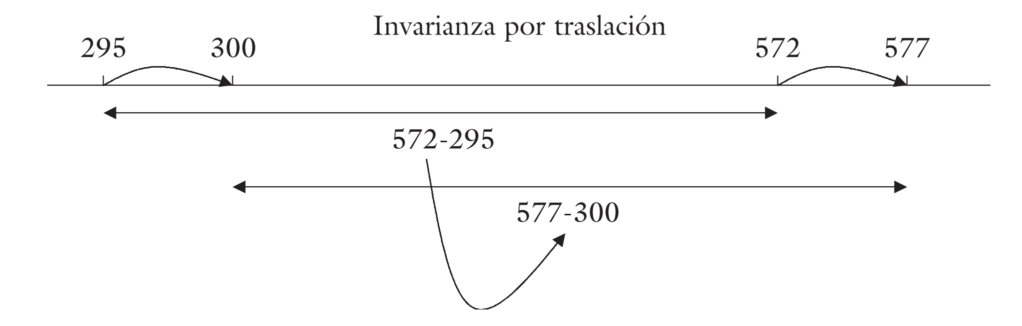
Acerca del uso de escrituras aditivas y sustractivas es de especial interés el uso de calculadoras, que obligan a utilizar un lenguaje específico, coincidente con las escrituras matemáticas de las operaciones.

Dentro de la sustracción los contextos derivados de la noción de distancia permiten manejar dos propiedades de la diferencia que son muy útiles para el desarrollo de algunas técnicas informales de cálculo. Nos referimos a la propiedad triangular y la invarianza de la distancia por traslaciones.



Esto se traduce en cálculos como:

$$305 - 188 = (305 - 200) + (200 - 188) = 105 + 12 = 117$$



Permite cálculos como:

$$572 - 295 = (572 + 5) - (295 + 5) = 577 - 300 = 277$$

Encaminados ya a la construcción de técnicas definitivas, las actividades deben evolucionar aprovechando las características de nuestro sistema de numeración. Casi todos los procesos que desarrollan los algoritmos de cálculo están justificados por las propiedades de nuestro sistema de numeración.

De esta manera es interesante retomar posibles actividades anteriores sobre el repertorio pero con múltiplos de 10. Se trata de poner de manifiesto la facilidad de operar con números como 10, 70, 300, de modo que el alumno pueda razonar:

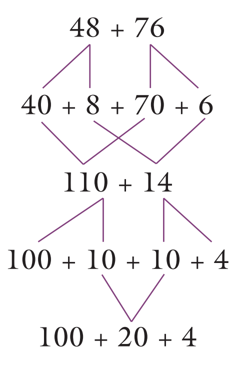
Si 6 +7 = 13, entonces 60 + 70 = 130.

Aunque no nos hayamos ocupado aquí del aprendizaje del sistema de numeración, es obvio que las técnicas de cálculo están íntimamente ligadas al mismo. Los contextos que obliguen al alumno a trabajar con agrupamientos recursivos decimales, o bien con ábacos, son utilizables para el aprendizaje de las técnicas de adición y sustracción. Gran parte de las dificultades que genera la comprensión de esta técnica son debidas a un mal aprendizaje del significado del valor de posición de las cifras.

Para afrontar estas dificultades es aconsejable que se trabajen técnicas como:

$$48 + 76 = 40 + 8 + 70 + 6 = 40 + 70 + 8 + 6 = 110 + 14 =$$
$$= 100 + 10 + 10 + 4 = 100 + 20 + 4 = 124$$

Como se observa, el primer trabajo consiste en «alargar» la escritura. El acortamiento de este proceso se hace necesario cuando los números generan una gran cantidad de sumandos.



Los posibles atajos que pueden construirse podrán ser evoluciones tendentes a técnicas más depuradas.

Los errores usuales en la ejecución del algoritmo de la adición, sin tener en cuenta los producidos por fallos en el repertorio, son debidos a un uso incorrecto del valor de la posición. Los más corrientes vienen caracterizados por un mal alineamiento de las cifras cuando los dos números tienen distinta cantidad de cifras, y por problemas en la llevada, olvidándolo en la mayoría de las veces,

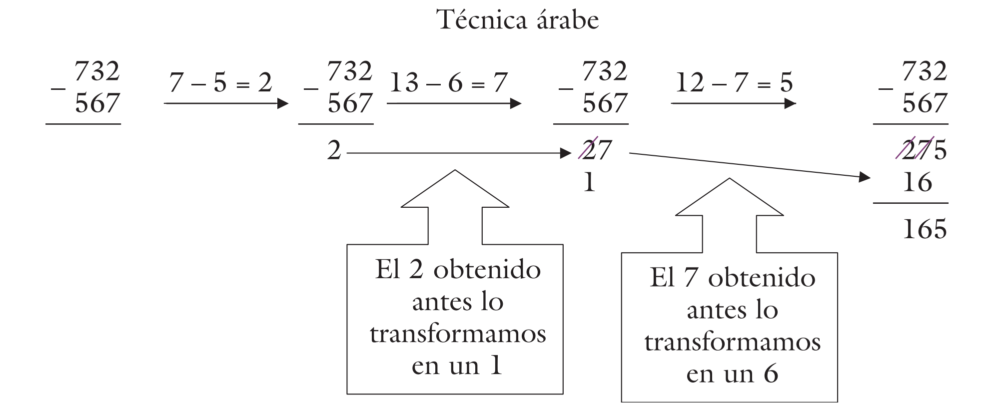
84 + 76 ——— 10 15 ——— 160	84 + 76 ——— 15 84 + 76 ——— 1~~5~~6 6 ——— 160	1 + 84 76 ——— 160
Es una revolución natural de la técnica de descomposición vista antes.	Se empieza por la izquierda y la llevada no es necesario guardarla en la memoria de trabajo. Al sumar en las unidades 6 + 4 escribimos 0 y añadimos 1 al 5 obtenido en las decenas (técnica árabe).	Es prácticamente el algoritmo usual. La omisión de la unidad arriba la realizará el niño cuando no la necesite.

o bien gestionándolo mal. Pueden ser de gran utilidad didáctica algunas técnicas intermedias para la construcción del algoritmo definitivo de la adición.

En cuanto a la técnica de la sustracción las dificultades se incrementan debido a que la llevada pervive más tiempo en la memoria de trabajo. Si la sustracción provoca una doble llevada (503 – 195), las dificultades prácticamente desaconsejan su uso.

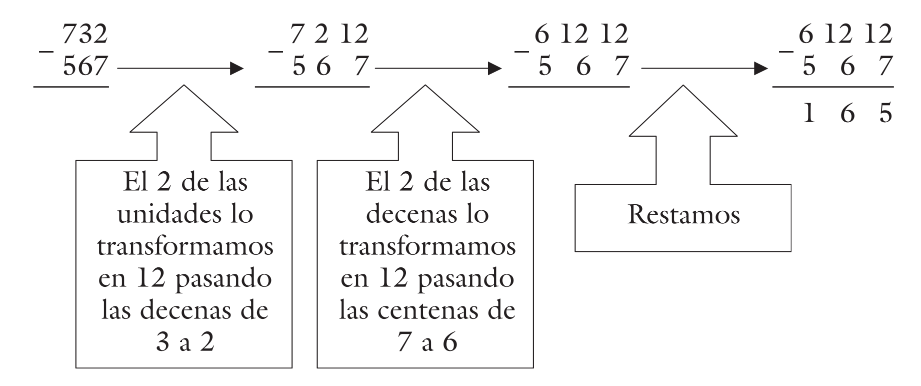
También encontramos otros algoritmos que, a nuestro juicio, permiten evitar estos errores, cuando no sustituir a la técnica estándar.

Técnica árabe



Al igual que con la adición, si comenzamos por la izquierda la llevada no necesita estar apenas tiempo en la memoria de trabajo, por lo que la posibilidad de error disminuye. Cuando la cifra del sustraendo es mayor que la del minuendo, el proceso es el mismo que en nuestra técnica usual (13-6 en lugar de 3-6), pero la llevada se resuelve disminuyendo en una unidad la cifra obtenida de la unidad anterior.

Técnica de las descomposiciones previas



Este algoritmo transforma previamente las cifras del minuendo que van a necesitar préstamo de las unidades superiores. (El 2 de las unidades se transforma

en 12, disminuyendo en una unidad la cifra de las decenas). De esta manera, el valor de las distintas posiciones y los cambios entre las unidades se utilizan de manera explícita, lo que podrá ayudar a producir menos errores.

Actividad 13: Efectúe la sustracción 38 746-17 997 mediante la técnica usual y las dos descritas antes. ¿Qué concluye?

En definitiva, se trata de hacer aflorar todas las propiedades que «esconden» las técnicas algorítmicas en su automatización. Posibilitar que el alumno parta de técnicas «propias», menos económicas, para que progresivamente vaya mejorándolas, es la mejor manera de aprender significativamente los algoritmos de cálculo. Además permitimos que cada alumno encuentre la técnica que mejor se adapte a sus necesidades y posibilidades cognitivas.

BIBLIOGRAFÍA

APMEP (1985) : *Jeux 2. Jex et activités numériques*, París, APMEP.

BAROODY, Arthur J.(1988): *El pensamiento matemático de los niños*, Madrid, Visor.

ERMEL, (1991): *Apprentissages numériques CP*, París, Hatier.

ERMEL, (1993): *Apprentissages numériques CE1*, París, Hatier.

ERMEL, (1995): *Apprentissages numériques CE2*, París, Hatier.

KAMII, C. (1985): *El niño reinventa la aritmética. Implicaciones de la teoría de Piaget*, Madrid, Visor, 1986.

KAMII, C . (1989): *Reinventando la aritmética II*, Madrid, Visor, 1992.

KAMII, C. (1994): *Reinventando la aritmética III*, Madird, Visor, 1995

HUGHES, M. (1986): *Los niños y los números*, Barcelona, Planeta-Nueva Paideia, 1987.

MAZA, C. (1989): *Sumar y restar*, Madrid, Visor.

RESNICK, L.B. y FORD, W.W. (1981): *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos,* Barcelona, Paidos-MEC, 1990.

VERGNAUD, G. (1985): *El niño, las matemáticas y la realidad*, México, Trillas, 1991.

VERGNAUD, G. (1990): *La théorie des champs conceptuels*, Recherches en Didactiques des Mathématiques, 10, 2.3, 133-170.

VERGNAUD, G. (2001): *Problemas aditivos y multiplicativos*, en CHAMORRO, M.C. (Ed.) *Dificultades del aprendizaje de la matemáticas*, Madrid, MECD.

CAPÍTULO 6

Las relaciones multiplicativas: el cálculo multiplicativo y de división. Cálculo mental y con calculadora

ÍNDICE

Juan Miguel Belmonte Gómez

1. Introducción

En el capítulo precedente ofrecimos unas reflexiones generales sobre la enseñanza y aprendizaje del cálculo, para detenernos después en las operaciones de adición y sustracción. El objeto de este capítulo es el de particularizar las reflexiones en las operaciones de multiplicación y división. Revisaremos el sentido de estas operaciones, estudiando los distintos tipos de problemas que se corresponden con las estructuras multiplicativas. Posteriormente nos aproximaremos al tratamiento didáctico de las técnicas de cálculo de la multiplicación y la división. Por último centraremos nuestro trabajo en el cálculo mental y la utilización de la calculadora, elementos imprescindibles para ofrecer una visión completa del tratamiento del cálculo.

2. Objetivos

- Describir el significado de las operaciones de multiplicación y división.
- Identificar los contextos que se plantean en las relaciones multiplicativas.
- Estudiar los contextos adecuados para el diseño de secuencias didácticas para el aprendizaje de las nociones de multiplicación y división.
- Ofrecer indicaciones didácticas para el diseño de una progresión de actividades para el aprendizaje significativo de las técnicas de cálculo escrito de la multiplicación y la división.
- Poner de manifiesto la importancia del trabajo en el aula con el cálculo mental.
- Analizar la utilización de la calculadora como herramienta didáctica para la enseñanza del cálculo.

3. Problemas multiplicativos y de división

Como ya dijimos en el tema anterior, el significado de un concepto se construirá adecuadamente cuando se conozcan los contextos en los que cobra sentido. Por tanto pasaremos a exponer los distintos tipos de relaciones multiplicativas que proporcionan los distintos tipos de problemas, aspecto imprescindible para realizar una correcta presentación didáctica.

Los problemas de multiplicación y división se pueden clasificar[1] en tres grandes tipos:

[1] Seguimos, como en el caso de la adición, los trabajos de Vergnaud (1991), porque entendemos que se trata del estudio más completo sobre el campo conceptual de las estructuras multiplicativas.

Tipo I. Problemas de isomorfismo de medidas

Tipo II: Problemas de producto de medidas

Tipo III: Problemas con un espacio único de medidas

3.1. Tipo I. Problemas de isomorfismo de medidas[2]

Veamos los siguientes ejemplos:

Disponemos de seis bolsas de caramelos y en cada una de ellas hay siete caramelos, ¿cuántos caramelos tenemos?

Una bolsa de 6 kilos de naranjas cuesta 12 euros. ¿Cuánto costarán 8 kilos de naranjas?

Compré 4 botellas de leche por 3 euros y 20 céntimos. ¿Cuánto vale cada botella?

Dispongo de 78 céntimos para comprar lápices. Cada uno vale 13 céntimos. ¿Cuántos puedo comprar?

Se trata de situaciones donde se establece un isomorfismo[3] (basado en la proporcionalidad) entre dos campos de medidas. En todos ellos aparecen escrituras numéricas correspondientes a medidas de dos magnitudes distintas: bolsas y caramelos, peso de naranjas y dinero, botellas de leche y dinero, etc.

Cada problema plantea una función de proporcionalidad entre dos magnitudes:

Número de bolsas	Número de caramelos
6	?
1	7

Kilos de naranjas	Precio
6	12
8	?

Botellas de leche	Precio
1	?
4	3,20

Número de lápices	Precio
1	0,13
?	0,78

[2] Problemas de razón, según la terminología de C. Maza (1991).

[3] Un isomorfismo es una aplicación biyectiva entre dos conjuntos que «respeta» la operación que hay definida en cada uno de ellos. En este caso $f(a+b)=f(a)+f(b)$. Dicho de otra manera, si tengo 3+4 bolsas de caramelos, tendré 21+28 caramelos, 21 de las tres primeras y 28 de las cuatro segundas.

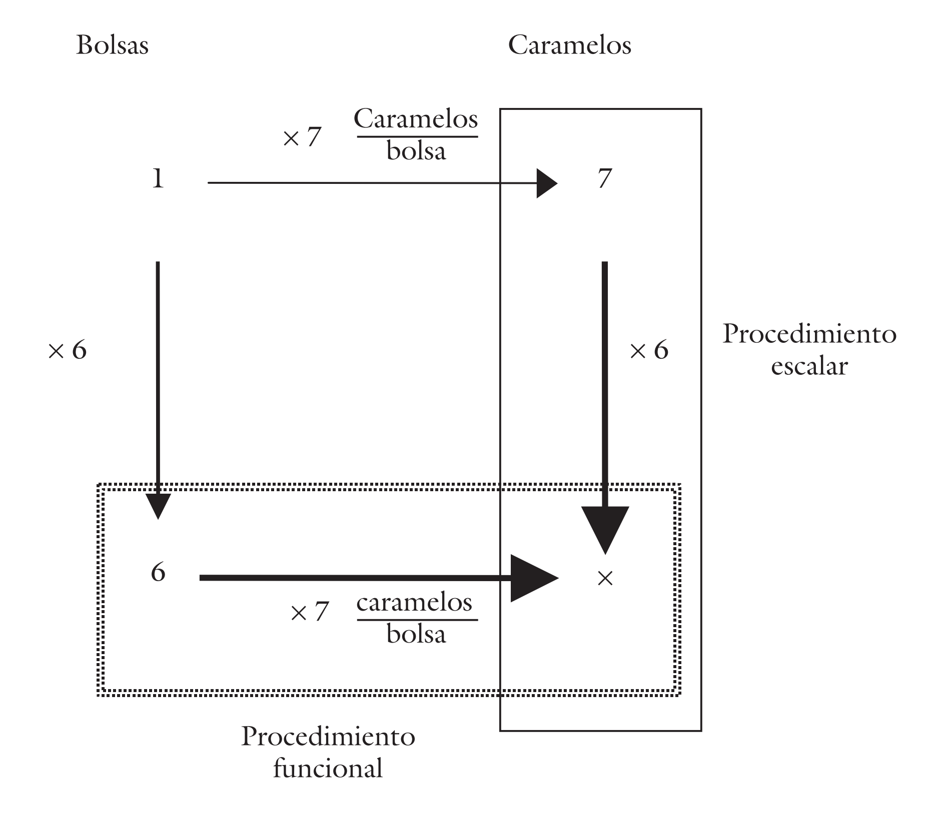
Lo primero que se puede observar es que en estos problemas multiplicativos no estamos ante una relación ternaria (dos números se componen para obtener otro tercero, como era el caso de la adición), sino cuaternaria: intervienen cuatro números que son los que permiten dar significado a la situación.

Los problemas más simples serán aquellos en los que uno de los datos haga referencia a una unidad del primer campo de medidas: en el ejemplo 1 nos encontramos quizá con el problema más elemental de multiplicación y en los ejemplos 3 y 4, clásicos problemas de división. Cuando esto no es así, incluso desde el punto de vista escolar es frecuente no considerar el problema como multiplicativo, en el segundo ejemplo que proponemos se identifica más como un problema de proporcionalidad, recordándonos a la tan traída y llevada «regla de tres».

Una consecuencia decisiva de este tipo de problemas en los que intervienen dos campos de medidas distintos es que el papel que desempeñan los dos números a multiplicar es distinto. Detengámonos en el problema del primer ejemplo:

«*Disponemos de seis bolsas de caramelos, y en cada una de ellas hay siete caramelos, ¿cuántos caramelos tenemos?*»

La situación podría representarse como sigue:



Los números *1* y *6* representan cantidades de bolsas y los números *7* y *x* expresan cantidades de caramelos. El problema multiplicativo establece una función entre esos dos campos de medidas.

Como se observa en el esquema existen dos procedimientos para encontrar *x*. En el que se denomina procedimiento escalar partiremos de una cantidad de caramelos (7) a la que aplicaremos el operador «× **6**», obteniendo otra cantidad de caramelos (7 × **6**). El operador necesariamente debe ser escalar, ya que simplemente establece una relación (multiplicativa en este caso) entre cantidades de la misma magnitud. Este procedimiento es el utilizado en la presentación de la multiplicación como suma repetida. Basta con sumar 7 (los caramelos de una bolsa) tantas veces como bolsas haya.

7 caramelos × 6 = 7 caramelos + 7 caramelos + 7 caramelos + 7 caramelos +
+ 7 caramelos + 7 caramelos = 42 caramelos

El otro procedimiento es el llamado funcional.

Bolsas Caramelos

$$6 \xrightarrow{\times 7} x$$

caramelos por bolsa

La multiplicación 6 × 7 indica:

6 bolsas × 7 caramelos/bolsa = 42 caramelos

Pasamos de una medida (bolsas) a otra (caramelos). Es el que sigue de manera natural la función que se establece entre las dos magnitudes que intervienen en el problema. Establece una razón entre número de sobres y número de cromos: «× 7». El operador en este caso no es escalar, está dimensionado.

× 7 caramelos/bolsa

Este análisis permite comprender que cuando mutiplicamos 6 × 7 no se multiplican bolsas por caramelos para obtener caramelos[4]. La constatación del establecimiento del isomorfismo entre esas dos magnitudes es lo único que permitirá dar respuestas coherentes a este tipo de cuestiones.

Naturalmente los dos procedimientos son equivalentes, pero no son iguales y ponen de manifiesto, entre otras cosas, las posibles dificultades de asimilación de la conmutatividad de la multiplicación, ya que no es evidente que el resultado de **7** × **6** y **6** × **7** sea el mismo en la resolución de un problema, ya que los procesos para obtenerlo son incluso matemáticamente diferentes.

Con todo esto queremos poner de manifiesto la complejidad que implican algunas de las relaciones multiplicativas, incluso las más sencillas como las que

[4] ¿Por qué no obtendríamos bolsas? Por el carácter dimensional del operador multiplicativo (caramelos/bolsa) que muestra el establecimiento de una función de proporcionalidad entre dos medidas, una inicial de bolsas y otra final de caramelos.

acabamos de ver. Comprender el funcionamiento de las situaciones que las provocan pasa por el trabajo de un cierto «cálculo dimensional» en tanto en cuanto es necesario manejar la relación entre distintas magnitudes en un problema. Esto permitirá más adelante el trabajo con magnitudes multilineales y magnitudes derivadas[5].

Esta dualidad en los procedimientos se observa muy fácilmente cuando estudiamos los problemas de división asociados a este problema multiplicativo.

Caso 1

Número de bolsas	Número de caramelos
1	7
?	42

Caso 2

Número de bolsas	Número de caramelos
1	?
6	42

En el primer caso la división busca la cantidad de unidades de una de las magnitudes.

Hemos comprado bolsas de caramelos. En cada una de ellas había 7 caramelos y en total tenemos 42 caramelos. ¿Cuántas bolsas hemos comprado?

Como se puede observar, este tipo de problemas no se corresponde con una situación de reparto, situaciones que parecen que representan de manera exclusiva la noción de división. Los datos numéricos que nos proporciona el problema pertenecen ambos al mismo campo de medidas (cantidad de caramelos). Nos aboca a utilizar el que llamábamos procedimiento escalar, pero en sentido inverso, claro está. Si en el caso de la obtención de producto hablábamos de sumas repetidas, en este caso el procedimiento inicial más sencillo para resolverlo es el de las sustracciones sucesivas.

Bolsas rellenas	Caramelos restantes
1	42 – 7 = 35
2	35 – 7 = 28
3	28 – 7 = 21
4	21 – 7 = 14
5	14 – 7 = 7
6	7 – 7 = 0

[5] La superficie es una magnitud bilineal y el volumen trilineal. En cuanto a las magnitudes derivadas encontramos a la velocidad y densidad como ejemplos más sencillos.

El número de veces que podamos restar el divisor (7) del dividendo (42) será el resultado demandado (cociente).

En el segundo caso la división consiste en la búsqueda del valor unitario:

Hemos comprado 6 bolsas de caramelos y tenemos 42 caramelos, ¿cuántos caramelos había en cada bolsa?

Estamos ante un ejercicio típico de reparto, que son los que tradicionalmente se asocian a la división, y muestra claramente la dualidad de procedimientos que hemos indicado en este tipo de problemas. Nótese que ahora los dos números que aparecen en el enunciado corresponden a campos de medidas distintos: 6 bolsas y 42 caramelos. No tiene sentido, entonces, proceder como en el caso anterior mediante sustracciones sucesivas.

La resolución fomentará el tanteo mediante multiplicaciones, siempre bajo el funcionamiento de la función de proporcionalidad que nos plantea el problema. Estamos inmersos en el que hemos llamado antes *procedimiento funcional*, actuando aquí de manera inversa.

Caramelos por bolsa	Caramelos utilizados
1	6
2	12
3	18
…	…
6	36
7	42

Como hemos observado la dualidad de procedimientos da lugar, cuando se trata de divisiones, a tratamientos distintos para resolver los problemas. Recordaremos esta dualidad cuando trabajemos las técnicas de cálculo de la división, ya que un uso adecuado de los dos tipos de problemas permitirá el manejo de estas dos técnicas artesanales, cuya conjunción nos proporcionará las claves para la construcción de nuestra técnica definitiva.

3.2. Tipo II: Problemas de producto de medidas[6]

Veamos ahora otro tipo de problemas multiplicativos muy diferente del anterior.

---

[6] Problemas de combinación, según C. Maza (1991).

Ejemplo 1

Para formar el uniforme de un equipo de fútbol, se disponen de 5 camisetas distintas y 4 pantalones. ¿De cuántas formas distintas se puede uniformar el equipo?

Ejemplo 2

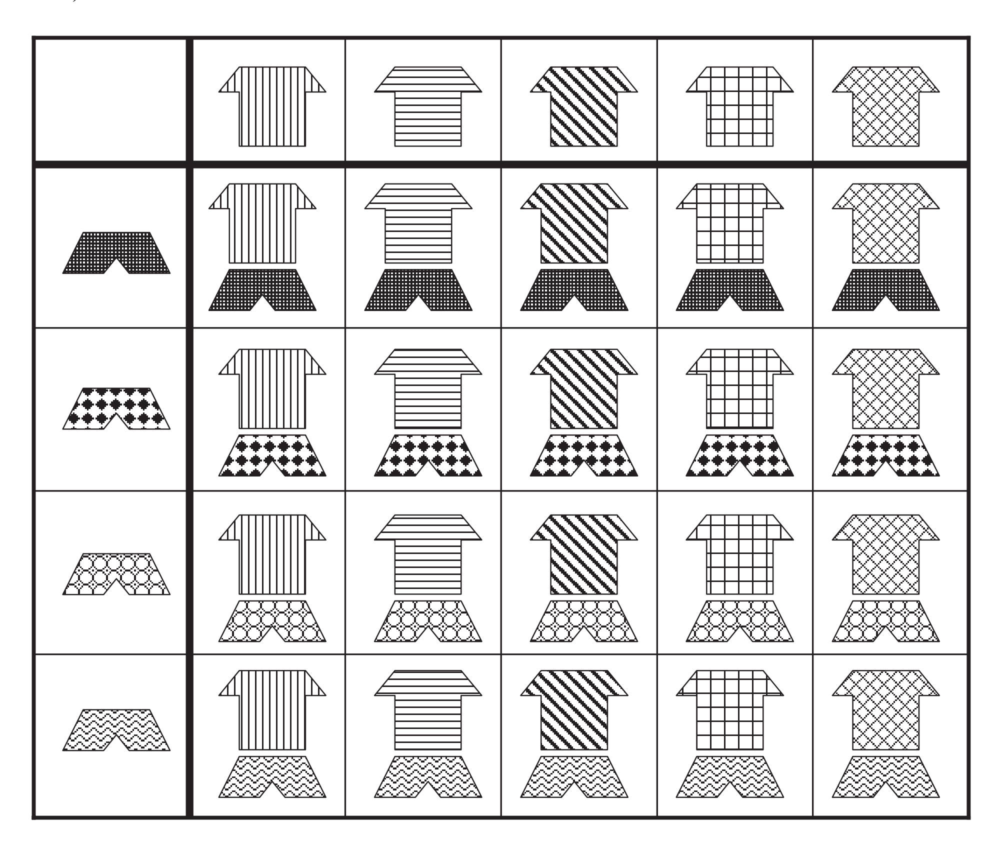
Una clase tiene los pupitres dispuestos en forma rectangular de manera que tenemos 6 filas y 4 columnas. ¿Cuántos pupitres hay en total?

No estamos aquí ante una función proporcional que asocia dos campos de medidas. Tenemos dos campos de medidas (que podrían ser el mismo en algún caso) que se componen para conformar otro mediante un proceso análogo al producto cartesiano.

Veamos el primer ejemplo:

La situación que plantea el problema podría representarse con la siguiente tabla cartesiana. La cantidad incógnita, los distintos uniformes, se corresponden con los elementos del producto cartesiano, tal y como muestra el siguiente cuadro.

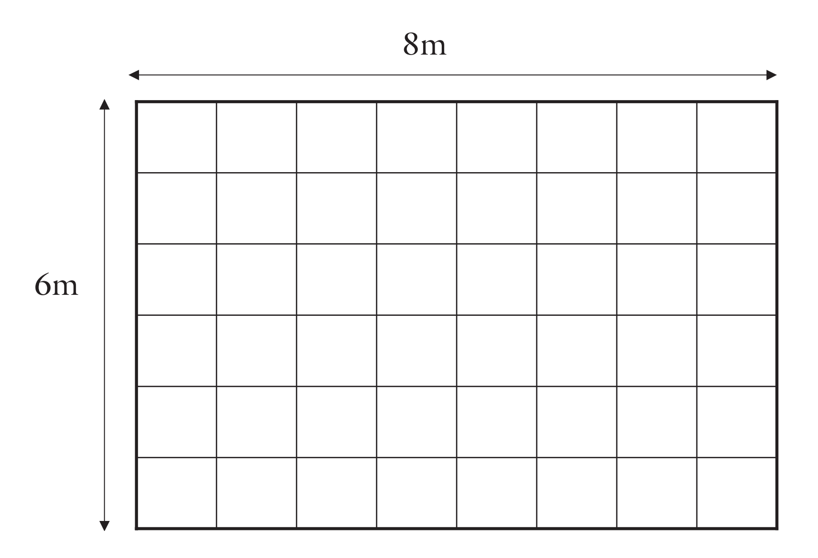
Pertenecen a este tipo de problemas aquellos que plantean disposiciones rectangulares de objetos (ejemplo 2), así como el cálculo de superficies y volúmenes, entre otros.



Una habitación rectangular mide 8 metros de ancho y 6 metros de largo. ¿Cuánto mide su superficie?

La resolución de este problema produce un cierto «producto de medidas». La obtención de la medida de la superficie de un rectángulo, conocidas las longitudes de sus lados, surge de la resolución de este problema multiplicativo. Como se observa en el dibujo, al descomponer el rectángulo en cuadrados, cada uno de ellos de 1 m^2, el problema es similar al ejemplo 2 de las disposiciones rectangulares de objetos.

Pero quisiéramos hacer una consideración sobre este problema. Al aplicar la «fórmula» del área de un rectángulo encontramos escrituras como



$$S = 8 \text{ m} \times 6 \text{ m} = 48 \text{ m}^2$$

Naturalmente $6 \times 8 = 48$, pero ¿es correcto afirmar que $m \times m = m^2$?

En realidad esto supone un abuso de lenguaje. Es el contexto el que dota de significado al hecho de que al multiplicar esos números obtengamos el valor del área, pero no multiplicamos los metros. Si fuera así, ¿por qué multiplicamos los metros y no otras cosas? Si $m \times m = m^2$, ¿por qué no tiene sentido litro × litro = litro^2? Es el conocimiento de las magnitudes, con todo lo que ello implica tal y como se verá en el capítulo correspondiente, el que proporciona las claves para conocer las relaciones multiplicativas que se producen entre distintas magnitudes. De esta manera podemos hablar de[7]:

[7] Como ya se dijo esto no es más que un abuso de lenguaje, pero que representa la relación multiplicativa de ciertas magnitudes con las llamadas elementales o simples. No en vano en Física de habla de ecuaciones dimensionales que no hacen más que representar estas relaciones entre las distintas magnitudes. Lo importante es no confundir estos procesos con las operaciones aritméticas de multiplicación y división.

Magnitudes lineales: longitud, masa, tiempo...

Magnitudes «producto» o multilineales: área, volumen...

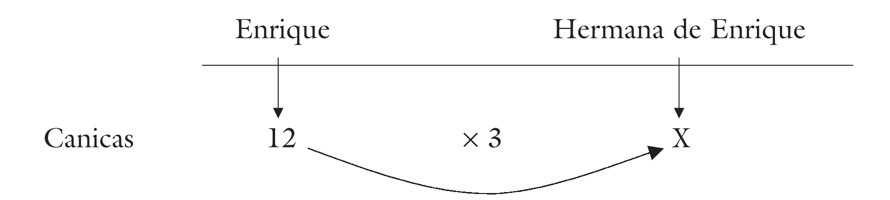
Magnitudes «cociente»: velocidad, densidad...

3.3. Tipo III: Problemas con un espacio único de medidas[8]

Estamos ante problemas de comparación pero en términos multiplicativos. Veamos un ejemplo:

Enrique tiene 12 canicas y su hermana cuatro veces más. ¿Cuántas tiene su hermana?

Como se puede observar los problemas son muy similares a los de comparaciones aditivas, pero la comparación utiliza un coeficiente multiplicativo (razón).



No aparece más que un campo de medidas (cantidad de canicas) con un operador (escalar) que relaciona ambas cantidades. No nos detendremos en ellos ya que son muy similares a los del primer tipo, de isomorfismo de medidas, cuando se abordaban con el procedimiento llamado escalar. Ya entonces podríamos haber enunciado «*en seis bolsas hay seis veces más caramelos que en una*»[9], lo que mostraba el operador escalar que indicábamos entonces.

Actividad 1: Estudie los problemas de multiplicación y división que presente un libro de texto. Clasifíquelos según los tipos aquí expuestos. ¿Hay predominancia de alguno?

[8] C. Maza los contempla como un caso particular de los problemas de razón.

[9] Recordemos el enunciado que estudiamos de aquel tipo de problema: «*Disponemos de seis bolsas de caramelos y en cada una de ellas hay siete caramelos, ¿cuántos caramelos tenemos?*».

Actividad 2: Aquí tenemos un problema multiplicativo complejo.

Un agricultor dispone de un campo rectangular de 35 m por 80 m. Lo planta de remolachas y obtiene un promedio de 9 kg por metro cuadrado. La producción debe transportarla al almacén en una furgoneta que permite cargar 3 000 kg. Si puede realizar cuatro viajes al día, ¿cuántos días tardará en transportar toda su producción al almacén?

Descomponga el lector este problema en todos los tipos de problemas multiplicativos que intervienen. ¿Qué otras preguntas podrían formularse?

Sobre la complejidad conceptual de los tipos de problemas multiplicativos hay aspectos contradictorios, que podrán influir en la decisión sobre la elección de los problemas a utilizar para introducir la multiplicación.

Parece claro que los contextos asociados a los problemas de isomorfismo de medidas son más sencillos para el niño. Puede incluso dar sentido a la nueva operación a partir de una herramienta de la que ya dispone: la suma iterada. Los problemas de producto de medidas presentan la multiplicación como una nueva operación sin una relación inmediata con los conocimientos previos del niño.

Ahora bien, el diferente papel asignado a los dos números que intervienen en la multiplicación en los problemas de isomorfismo de medidas (multiplicando y multiplicador) hace que la consideración de propiedades como la conmutativa y la distributiva no se produzca con facilidad.

Por otra parte, el uso de representaciones rectangulares, propias de los problemas del tipo II (problemas de producto de medidas), es un medio muy interesante para la generación de técnicas artesanales de cálculo de productos.

Con esto queremos concluir que es necesario plantear distintos ejercicios que contemplen los dos tipos de situaciones. Como asegura Maza (1991, 28):

> «Para conseguir esta unificación conceptual de la multiplicación, se deben tender lazos entre ambos problemas, lazos que permitan al alumno descubrir que las distintas formas de resolverlo son, en realidad, una sola.»

Cuando estudiemos las técnicas de cálculo, notaremos más especialmente la complementariedad de los dos contextos.

Actividad 3: Estudie el lector varios libros de texto y observe los problemas utilizados para la introducción de la multiplicación. ¿Se presentan y se relacionan distintos tipos de los aquí expuestos?

Antes de terminar la parte correspondiente al sentido de las operaciones queremos detenernos brevemente en un aspecto importante de la división: la noción de resto[10].

[10] Nos disculpamos porque hasta ahora todos los ejemplos de problemas de división que hemos utilizado son de resto nulo, lo que permite presentarla como la operación inversa a la multiplicación, aunque en realidad la división euclídea no se trate de una operación en los números naturales.

La división euclídea no es en sentido estricto una operación en los números naturales. El resultado de componer dos números no da como resultado otro número, sino dos: cociente y resto. Así pues, nos debe preocupar que los problemas que utilicemos para dar sentido a la división den carta de naturaleza a los dos resultados[11].

Actividad 4: Descubra el lector distintos contextos en los que sea el resto el dato decisivo en la resolución de un problema. ¿Son utilizados estos problemas en la introducción de la noción de división euclídea?

Incluso existen numerosos contextos en los que el resultado que resuelve los problemas no es el cociente sino el resto:

En una pista numerada mi ficha se desplaza de cuatro en cuatro. En la casilla 31 hay una trampa en la que no debo caer. Si empiezo en la casilla 1, ¿caeré en la trampa?

El resto no es un residuo ingrato que produce la división, forma parte de la misma y es consustancial a la aritmética discreta (con números naturales y enteros). Es importante utilizar problemas que pongan de manifiesto cuál es su papel. Desde luego la desafortunada, y tan extendida en los libros de texto, denominación de división exacta para las divisiones euclídeas de resto cero no ayuda especialmente.

4. Hacia los algoritmos de cálculo de la multiplicación y división

4.1. Cálculos multiplicativos

Como ya hemos apuntado en el apartado anterior, muchos autores aseguran que es más sencillo para el niño comenzar la multiplicación a partir de problemas de isomorfismo de medidas, lo que permite conectar esta nueva operación con la adición. Estos primeros problemas pueden ser abordados por los niños mediante la suma iterada que, como vimos, surge en este tipo de problemas como uno de los sentidos posibles de la multiplicación.

Naturalmente, estas estrategias de cálculo deben ser abandonadas en beneficio de otras propias del cálculo que, como dijimos en el capítulo anterior,

[11] Obviamente hay situaciones en las que es imposible considerar la existencia de un resto: queremos cortar una banda de 82 cm en cuatro trozos iguales. ¿Cuál es la longitud de cada trozo?: 20,5 cm. En este contexto no tiene sentido hablar de resto, pero ya trabajamos en otros conjuntos numéricos: decimales o racionales.

parten de unos resultados previos (el repertorio) para obtener los resultados que se piden[12].

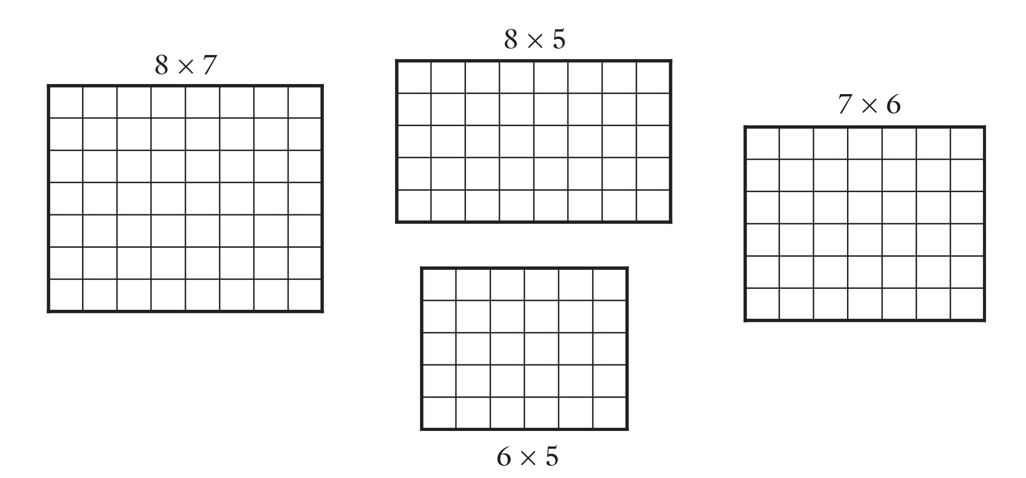
Para conseguirlo, debemos producir unas determinadas transformaciones en el producto que se nos plantea hasta que, con el repertorio de que disponemos, podamos obtener el resultado.

Recordemos que, en el caso de la adición (y sustracción), las técnicas descomponían los sumandos hasta conseguir algunos resultados ya conocidos, o bien más sencillos de obtener. La descomposición se hacía de forma aditiva, lo mismo que se hará en la multiplicación, lo que hará necesario el uso de la propiedad distributiva[13].

Así pues, la transformación de resultados en una multiplicación se va a realizar mayoritariamente mediante la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, lo que nos va a permitir obtener unos productos a partir de la suma de otros.

Para tomar conciencia y ejercitarse en el uso de esta propiedad, los problemas con disposiciones rectangulares (pertenecientes al tipo de producto de medidas), nos ofrecen una gran utilidad didáctica. Veamos el siguiente problema:

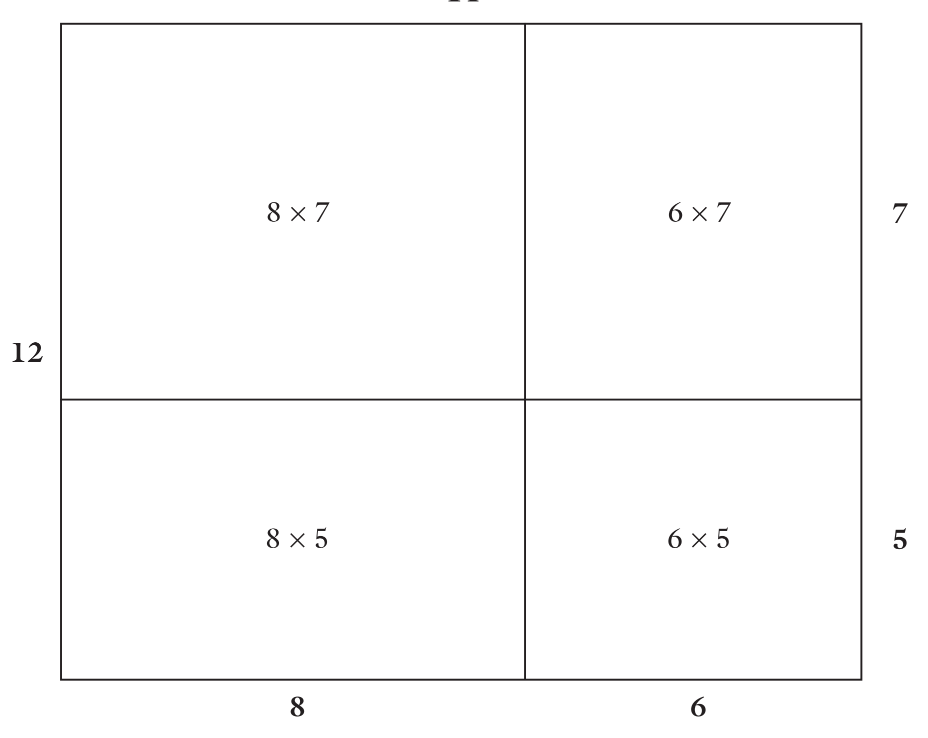
Aquí tenemos cuatro cuadrículas de dimensiones 8 × 7, 8 × 5, 7 × 6 y *6 × 5. Construir con ellas otras más grandes. Obtener las escrituras.*



Con todas ellas se puede obtener un rectángulo de 14 × 12,

[12] En el caso de nuestra técnica de cálculo el repertorio consiste en los resultados de los productos hasta 9 × 9, a partir de los cuales, siguiendo las reglas del algoritmo, podemos obtener cualquier otro.

[13] Si tenemos un producto a × b y descomponemos a = c + d, nos queda (c + d) × b o lo que es lo mismo, por la propiedad distributiva, c × b + d × b.



por lo que se deduce que:

$$14 \times 12 = 8 \times 7 + 8 \times 5 + 6 \times 7 + 6 \times 5$$

Escrito de otra forma:

$$14 \times 12 = (8 + 6) \times (7 + 5)$$

Actividad 5: Consiga ahora el lector la cantidad 24 × 18 a partir de algunas de estas escrituras

11 × 9; 9 × 11; 6 × 8; 6 × 8; 5 × 9; 8 × 9; 11 × 8; 6 × 9; 5 × 8; 6 × 5 y 5 × 11.

Este tipo de actividades permiten constatar la posibilidad de descomponer una escritura multiplicativa en una suma de otras más pequeñas.

Alcanzar este objetivo a partir del trabajo con la suma iterada es, a nuestro entender, mucho más complicado.

Además de la propiedad distributiva hay otra propiedad de la multiplicación, que tiene su origen en las propiedades del sistema de numeración decimal posicional, que va a jugar un papel muy importante en la construcción de técnicas de cálculo. Nos referimos a la regla de los ceros, que se deduce de la operatividad del cero de nuestro sistema de numeración: si se multiplica por 10 (la base

del sistema) cualquier número, el resultado se obtiene añadiendo un cero como cifra final al número multiplicado. Si tomamos ab como un número de cifras a y b:

$$ab \times 10 = ab0$$

Naturalmente es fundamental que se presenten al alumno actividades que le permitan constatar este hecho, lo que le irá haciendo ver cuáles son las descomposiciones de los números que, mediante la propiedad distributiva, permiten obtener escrituras más sencillas.

El proceso podrá evolucionar de manera que surjan técnicas más evolucionadas como la que sigue, en la que se descomponen los números de forma canónica.

Para obtener 74×46

Descomponemos $74 = 70 + 4$ y $46 = 40 + 6$

Técnica de los recortados

74

46			
	$70 \times 40 = (7 \times 4) \times 100$ 2 800	$40 \times 4 = (4 \times 4) \times 10$ 160	**40**
	$70 \times 6 = (7 \times 6) \times 10$ 420	$4 \times 6 = 24$	**6**
	70	**4**	

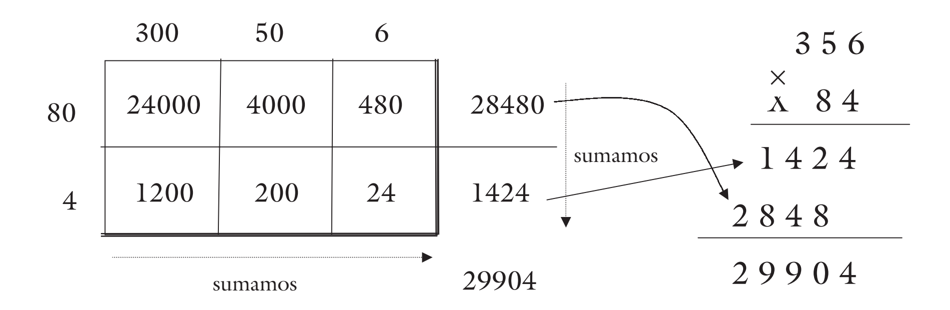
$$74 \times 46 = 2\,800 + 160 + 420 + 24 = 3\,404$$

Como se puede observar, debido a la regla de los ceros, el repertorio imprescindible para obtener los productos queda ya configurado por los productos

de números de una cifra, resultados que todos los algoritmos de cálculo tienen necesidad de utilizar[14]. Todo lo que dijimos referente a las *tablas de sumar* en el apartado anterior, lo hacemos extensivo al caso del aprendizaje del repertorio multiplicativo.

Este proceso puede justificar muy bien los porqués de nuestro algoritmo, cuyas dificultades más frecuentes están siempre asociadas al tratamiento de los resultados parciales, bien por las llevadas dentro de un mismo resultado, bien por la colocación de los mismos. Hay que entender que el orden de unidad está siempre presente en la técnica antes descrita (los ceros marcan el orden de unidad en el que nos movemos), mientras que en nuestro algoritmo éste sólo viene marcado por la posición precisa en el que hay que colocar cada resultado. Intentar adiestrar directamente en técnicas como la nuestra provocará aprendizajes memorísticos carentes de significado.

Ilustremos todo esto observando una posible evolución de esta técnica de los recortados y su correspondencia con nuestra técnica usual.



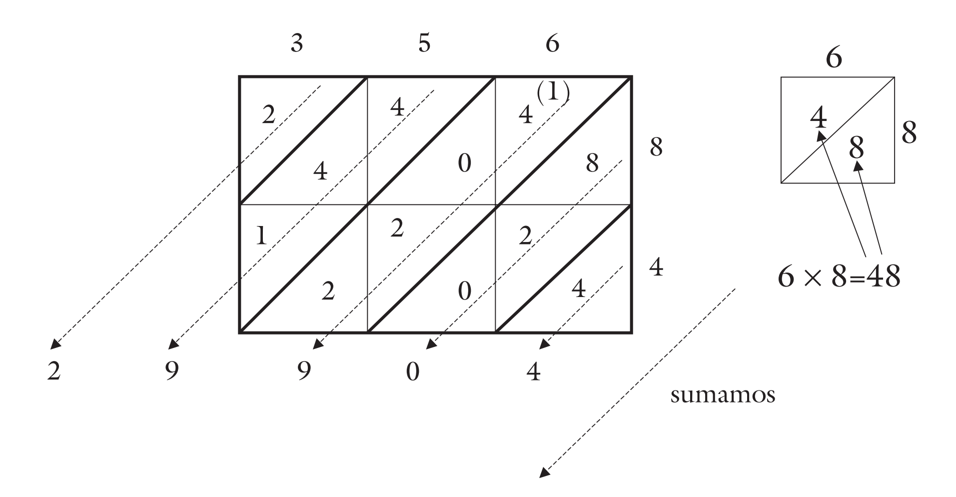
Como complemento a nuestra técnica, y para evitar los numerosos errores de los acarreos en la obtención de los resultados parciales, la utilización de algoritmos como el de la celosía pueden ser excelentes puentes para su construcción, incluso pueden presentar grandes ventajas como algoritmos finales, adaptándose a las distintas singularidades de los aprendizajes de los alumnos.

Veamos dicha técnica en el caso del producto anterior 356 × 84.

Actividad 6: Realice una multiplicación de un número de varias cifras por otro de una sola mediante la técnica de la celosía. Investigue qué utilización puede tener esta actividad en la enseñanza de la técnica estándar de la multiplicación.

[14] En realidad existen técnicas como la egipcia (que se verá más adelante) que no lo necesita, ya que no utiliza todo el potencial de nuestro sistema de numeración.

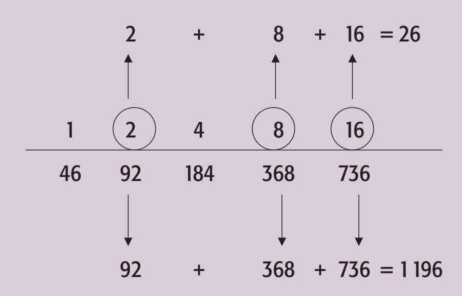




Actividad 7:

En la técnica egipcia de la multiplicación.

46 × 26 se obtiene así



Luego el producto de 46 × 26 = 1 196

Justifique la técnica y estudie las similitudes y diferencias con las técnicas antes descritas.

4.2. Cálculos de división

Por lo que respecta a las técnicas de la división, podemos destacar dos grandes estrategias artesanales: el encuadramiento del dividendo por múltiplos del divisor y las sustracciones repetidas del divisor al dividendo.

Tenemos 58 cuadraditos y queremos construir con ellos el rectángulo más grande posible que tenga 7 cuadraditos en uno de sus lados.

Si sabemos que $7 \times 8 < 58 < 7 \times 9$

La solución sería el rectángulo de 7×8.

Como ya vimos en el apartado dedicado a los problemas, este tipo de problemas conduce al uso del encuadramiento para la obtención del cociente.

El resto será $58 - (7 \times 8) = 2$

Veamos, sin embargo, este otro problema:

Queremos repartir en bolsas 45 canicas, de manera que haya 6 en cada una de ellas. ¿Cuántas bolsas tendré?

Bolsas utilizadas	Canicas que quedan
1	45 – 6 = 39
2	39 – 6 = 33
3	33 – 6 = 27
4	27 – 6 = 21
5	21 – 6 = 15
6	15 – 6 = 9
7	9 – 6 = 3

Como se observa estos contextos inducen a utilizar las sustracciones repetidas del divisor.

Ninguna de estas dos técnicas por separado evoluciona satisfactoriamente hasta una técnica definitiva. Cuando los números sean de un cierto tamaño, las tareas de restas sucesivas o encuadramiento de múltiplos serán excesivamente costosas.

Las actividades a proponer a los alumnos deben provocar, entonces, la coordinación de ambas técnicas artesanales. Mediante el trabajo con números más grandes podremos conseguir procesos como sigue:

Construir con 2 664 cuadraditos un rectángulo que tenga 21 por fila.

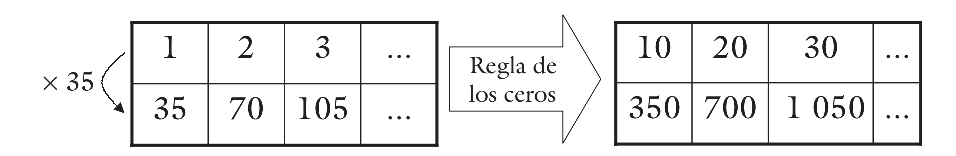
Cuadrados	Filas
2 664 – 2 100 = 564	100
564 – 210 = 354	10
354 – 210 = 144	10
144 – 105 = 39	5
39 – 21 = 18	1
Resto: 18	Filas: 126

Buscar directamente entre qué dos múltiplos de 21 se encuentra 2 664 es una estrategia posible pero poco económica. Determinar cuántas veces se puede restar 21 de 2 664 también resulta poco realizable. La decisión óptima consiste en restar, no de 21 en 21, sino restar múltiplos de 21 fáciles de encontrar, de manera que con una única sustracción disponga de una cantidad importante para incorporar al cociente. Así, restando 2 100 (21 × 100) ya conozco que al menos el rectángulo tendrá 100 filas. Luego seguiré restando múltiplos de 21 hasta que no podamos seguir. De esta manera convergen las dos técnicas para dar lugar a otra mucho más efectiva y económica. Queremos hacer notar que los múltiplos del divisor (21) utilizados son los más sencillos de obtener (21 × 10, 21 × 100, ...) o, en todo caso, conocidos por el que ejecute la técnica.

El proceso hasta un algoritmo similar al nuestro pasa por introducir una variable importante: hacerlo en el menor número de pasos, intentando establecer de antemano el número de pasos que voy a necesitar. Cada uno de estos pasos se corresponderá con la obtención, en la técnica usual, de cada una de las cifras del cociente.

Pueden favorecerse procesos de este tipo:

Para obtener 848 : 35



CAPÍTULO 6

Como 1 050 > 848 > 700 calculamos 848 – 700 = 148

Estos cálculos se corresponderían con los que realiza nuestra técnica obteniendo la primera cifra del cociente:

```
  8 4 8 | 3 5
– 7 0     2
-----
  1 4 8
```

Ahora se encuadra 148 entre múltiplos de 35:

× 35				
1	2	3	4	5
35	70	105	140	175

Como 175 > 148 > 140 restamos 148 – 140 = 8

En nuestra técnica:

```
  848 |35
 -70   24
  148
 -140
     8
```

Hemos obtenido que:

$848 = 700 + 14 + 8 = (35 \times 20) + (35 \times 4) + 8 = 35 \times (20 + 4) + 8 = (35 \times 24) + 8$

El cociente será 24 y el resto 8.

Aunque parezca un procedimiento un tanto rebuscado, como hemos indicado, no es más que el detalle de parte de las tareas que utiliza la técnica usual de la división, y su conocimiento permitirá aprender dicha técnica de manera significativa.

Sólo resta disponer los resultados de una manera particular para que ya pueda aparecer nuestra técnica estándar.

Para obtener 16 055 : 68

```
                  |  16055  |
68 × 200=13600    | -13600  | 200
                  |   2455  |
68 × 30=2040      |  -2040  | 30
                  |    415  |
68 × 6=408        |   -408  | 6
                  |      7  | 236
```

⇒

```
 16055 |68
-136     236
  245
 -204
   415
  -408
     7
```

Actividad 8: ¿Qué ocurre en el procedimiento anterior cuando hay un cero en el cociente? ¿Cuál es la diferencia con nuestra técnica usual?

Estos procesos ya guardan una gran similitud con nuestra técnica usual. El paso a esta última se realizará progresivamente, cuando el niño no necesite la anotación de todos los resultados intermedios. Entendemos que no es tan importante el adiestramiento en la técnica estándar tal y como la conocemos, si eso supone una pérdida de control por parte del alumno sobre sus propios aprendizajes. Nótese la dificultad que va a suponer la exigencia de que todos los cálculos intermedios sean implícitos, y el fácil equívoco con los ceros intercalados del cociente.

Actividad 9: Cuando utilizamos la técnica usual de la división en el caso anterior para dividir 16 055 entre 68 comenzamos diciendo: «16 entre 68 no cabe, 160 entre 68...» , y continuamos. ¿Por qué descartamos 16 entre 68 si en realidad estamos dividiendo 16 000 entre 68?

5. El cálculo mental frente al cálculo escrito

Cada vez que una persona se enfrenta a la realización de un cálculo, estamos seguros que parte de los procesos que va a desarrollar los podríamos catalogar de cálculo mental. No creemos equivocarnos al afirmar que de todos los tipos de cálculo, el mental es el más utilizado. A pesar de esto da la sensación de que tradicionalmente queda bajo la responsabilidad del alumno el desarrollo de este tipo de cálculo.

Para estudiar, aunque sea brevemente, el cálculo mental en la enseñanza comenzaremos haciendo una precisión. La verdadera disyunción entre tipos de cálculo es la que se da entre cálculo automático y cálculo pensado. No siempre el cálculo escrito es automático, ni todo el cálculo mental es pensado. Así pues, y aunque realmente sea una denominación un poco engañosa, vamos a asumir que, cada vez que hablemos de cálculo mental nos referimos al pensado[15], y cada vez que nos referimos al cálculo escrito, hacemos referencia al automático que ofrecen los algoritmos de cálculo. Aclarado este aspecto veamos, simplificadas en esta tabla, las principales diferencias entre los dos tipos de cálculo.

Cálculo escrito	Cálculo mental (pensado)
Es general. Suele utilizarse una única técnica para cualquier par de números. Su funcionamiento es siempre homogéneo. Es igual para distintos individuos.	Existen muchas técnicas, entre las que hay que seleccionar la que mejor se adapte a cada situación particular. Incluso varía de un individuo a otro.
Las propiedades numéricas las utiliza de manera implícita.	Hace uso explícito y consciente de las propiedades numéricas que necesite en cada ocasión.
El repertorio está prefijado y limitado. Su uso es memorístico.	La cantidad de repertorio disponible juega un papel muy importante. Una buena estructura permite una mejor movilización.
Los errores son difíciles de detectar y corregir.	Siempre hay una vigilancia consciente del error.
Es tranquilizador, fiable.	Crea desasosiego y es rápido.
Cuando se ejercita, produce muchos errores.	Cuando no se ejercita, no se produce.

[15] Con esto asumimos que el cálculo mental (pensado) también puede realizarse, y de hecho se realiza, con lápiz y papel. Es más, se trata de una variable que debe gestionar, el docente en las actividades la posibilidad o no de usar el soporte escrito en el cálculo pensado.

En resumen, pensamos que los dos tipos de cálculo son complementarios. El cálculo mental es siempre el primero a utilizar cuando la situación lo requiera. Si lo que se busca es una mayor fiabilidad llegará el turno del cálculo escrito (o calculadora), que siempre debería ser *supervisado* por el cálculo mental. En definitiva no estamos ante dos procedimientos disjuntos sino que deben interactuar en multitud de situaciones, si queremos asegurar un buen dominio del cálculo, sea cual sea.

Pero además de su necesidad práctica, el trabajo con el cálculo mental en la enseñanza presenta un gran interés didáctico, que podríamos articular en torno a los siguientes aspectos:

- *El cálculo mental pone de manifiesto las propiedades de las operaciones.*

En la ejecución de las técnicas de cálculo mental es necesario hacer uso explícito de las propiedades de las operaciones, así como de las que se derivan del sistema de numeración.

Así para realizar el siguiente producto:

$$45 \times 18 = (9 \times 5) \times (2 \times 9) = 9 \times (5 \times 2) \times 9 = 81 \times 10 = 810$$

exige utilizar las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación.

- *El cálculo mental hace uso de la relación entre las distintas operaciones.*

En muchas ocasiones, aunque no aparezcan distintas operaciones en el enunciado del cálculo, puede ser de gran utilidad transformar algún número para facilitar el cálculo.

$$44 \times 25 = 44 \times (100/4) = (44/4) \times 100 = 11 \times 100 = 1\,100$$

Esta operación hace necesario conocer la relación entre la multiplicación y la división, además de conocer cuáles son sus reglas *sintácticas* cuando aparecen juntas en una expresión.

Este otro ejemplo lo es para la adición y sustracción.

$$679 + 998 = 679 + (1\,000 - 2) = 1\,679 - 2 = 1\,677$$

- *El cálculo mental provoca situaciones de aproximación y estimación.*

Es quizá donde el cálculo mental emerge como la herramienta mejor adaptada. Uno de los usos básicos y cotidianos del cálculo mental es el de determinar el orden de magnitud de un resultado antes de obtenerlo. En muchas ocasiones esta aproximación será además suficiente, sin necesidad de obtener mayor precisión con técnicas automáticas. La vida cotidiana nos ofrece multitud

Actividad 10: Recuerde en cuántas ocasiones cotidianas realizamos algún cálculo pensado. ¿En cuántas de ellas se trata de obtener resultados aproximados? ¿Con qué frecuencia presentamos situaciones de aproximación en el aula? ¿Cuál es el estatus de los cálculos aproximados en la práctica escolar?

de contextos (previsión de costes, comparación de precios, medidas, etc.) donde lo importante no es obtener el resultado preciso, sino una aproximación adecuada a nuestros intereses de cada momento. En estas situaciones no es frecuente recurrir al cálculo escrito.

- *El cálculo mental ayuda a movilizar y estructurar resultados.*

Una de las claves para disponer de un buen cálculo es la de tener bien estructurados los resultados conocidos. El cálculo escrito hace uso de un repertorio limitado que además va a movilizar siempre de manera análoga. Sin embargo el cálculo mental, dada su variedad de procedimientos, exige al individuo que elija entre su repertorio cuál le va ser de utilidad para abordar un determinado cálculo.

Para realizar esta suma 37 + 56 + 63 + 44 hay que darse cuenta de que 37 + 63 = 56 + 44 = 100, permite obtener el resultado rápidamente. Los repertorios sobre complementos a 10, 100, 1 000, etc., deben jugar un papel importante en la adición y sustracción y deben ser practicados por los alumnos.

- *El cálculo mental como problema abierto.*

Una de las características del cálculo mental es su variedad de procedimientos para realizar la misma tarea. Precisamente si algo caracteriza a un problema abierto es la diversidad de resoluciones. Así pues, en mucha ocasiones los ejercicios de cálculo mental suponen problemas abiertos para los alumnos.

Para obtener 25×16 observamos distintas posibilidades:

$$25 \times 16 = 25 \times 4 \times 4 = 100 \times 4 = 400$$

$$25 \times 16 = 5 \times 5 \times 2 \times 8 = 40 \times 10 = 400$$

$$25 \times 16 = 25 \times 2 \times 8 = 50 \times 8 = 400$$

$$25 \times 16 = (20 + 5) \times 16 = 320 + 80 = 400$$

Aunque parezca poco creíble, la mayoría de nuestros escolares se suelen decantar por esta última, a pesar de que suponga un proceso más laborioso, ya que es la que más se acerca a la técnica algorítmica estándar, demostrando un pobre manejo de otros repertorios y descomposiciones.

- *El cálculo mental favorece la evolución consciente de las estrategias de cálculo.*

Como problema abierto, el cálculo mental puede provocar debates en clase acerca de la mejor estrategia para un problema determinado, que no será la misma para todos los alumnos. Este tipo de trabajos permite difundir nuevos procedimientos por la clase, donde se intentará privilegiar los mejores (mejor adaptados, más económicos, más seguros, etc.) e institucionalizarlos cuando sea conveniente.

En general, el cálculo mental va a profundizar en el conocimiento de los números, de los sistemas de numeración, del significado de las operaciones y su

relación entre ellas, y los algoritmos de cálculo. En definitiva es uno de los grandes aspectos a tener en cuenta cuando hablamos de la enseñanza del cálculo.

Para terminar, queremos destacar que el cálculo mental tiene también unas exigencias, que Giménez J. y Girondo L. (1993) describen con bastante acierto.

– *De actitud y valor:*
    - Concentración y atención para no cometer errores.
    - Hábito, para dominar reglas simples.
    - Interés, que surge pronto ya que ayuda a escribir menos.
– *De memoria numérica:*
    - Exige el conocimiento de las tablas de sumar y multiplicar hasta el 12 al menos.
    - Aumenta en rapidez si se añaden otros conocimientos: cuadrados, descomposiciones de las potencias de 10, etc.
    - Es limitado en lo referente a la retención de datos.
    - Hace necesaria una retención momentánea de resultados intermedios.
– *De memoria estructural:*
    - Pide claridad en el encadenamiento de las operaciones.

6. El uso de la calculadora en la enseñanza del cálculo

Es difícil encontrar en la enseñanza de las matemáticas un aspecto más controvertido que el uso de la calculadora en clase. Para muchos maestros, e incluso padres que también tercian en esta polémica, el uso de las calculadoras provoca que los alumnos calculen sin pensar, o que acaben sin ser capaces de calcular por su cuenta. Aún a fuerza de repetirnos volvemos a invocar aquí que el gran objetivo de la enseñanza del cálculo es el de proveer al alumno de los conocimientos necesarios para que, de forma autónoma, decida qué técnica de cálculo utilizar en cada situación, y sepa realizarla. Y cuando hablamos de técnicas de cálculo también nos referimos al uso de la calculadora. Nos parece de una gran irresponsabilidad ocultar esta gran herramienta de cálculo, cuando hay multitud de situaciones en las que es ella la que mejor se adapta.

Esto no quiere decir que el niño vaya a usar siempre la calculadora (fuera del contexto escolar la utilizará cuando lo estime necesario, no lo olvidemos). Es el maestro el responsable de gestionar su uso dentro del aula. Verdaderamente se trata de una variable didáctica que va a jugar un papel fundamental en muchos problemas de matemáticas.

En realidad, y tal como afirma Fielker (1986), la calculadora supone un estímulo para la actividad matemática ya que:

- Hace posible problemas reales, cuando antes los problemas se debían adulterar frecuentemente para que el cálculo, posiblemente largo y engorroso, no entorpeciera la resolución del problema. Tener a nuestra disposición tal herramienta del cálculo nos permite acercar la enseñanza de las matemáticas a la realidad.

- Permite de manera inmediata procesos de ensayo-error en los cálculos, experimentación que ha sido hasta ahora prácticamente imposible. A este propósito Fielker (1986, 15) asegura:

  «Hacer hipótesis es uno de los grandes rasgos de una actividad matemática más abierta en la que los niños exploran los problemas numéricos con menos dirección del profesor, con más oportunidad para tomar decisiones, y con una mayor libertad para discutir, para identificar los problemas, para definir sus términos, para establecer sus propios límites, y, en general, para trabajar como matemáticos.»

- Supone un modelo estructurado de un modelo abstracto. La calculadora podríamos considerarla como un verdadero laboratorio numérico. Pocos materiales permiten experimentar con números como cuando estamos frente a una calculadora. Es quizá una de las primeras cosas que hace un niño cuando la tiene en sus manos.

- Exige la adaptación a un lenguaje externo, estructurado y estructurador. Cuando hacemos matemáticas, también nos preocupamos de construir un sistema de formulación que se adapte a las especificidades de las tareas matemáticas. En la enseñanza, este aspecto es fuente de muchos conflictos. La calculadora obliga, de manera natural y sin aparentes rechazos, a adoptar un lenguaje, que además coincide con el utilizado en aritmética.

- La calculadora es, en sí misma, una importante fuente de problemas, por lo que no sólo es una gran herramienta de cálculo, sino que es una gran aliada didáctica. Pensemos por ejemplo cómo realizar la división euclídea con una calculadora simple, ¿es un problema? Centrándonos más en el cálculo, lo primero que destacaremos son sus características como herramienta de cálculo frente a las otras técnicas mentales o escritas.

- Es la herramienta idónea para los cálculos largos y complejos, ahora bien en muchas ocasiones la estructura de los cálculos la debe proporcionar el usuario. Las calculadoras con prioridades algebraicas ya estructuran por sí mismas la secuencia de operaciones. Desde un punto de vista didáctico, y sobre todo en Educación Primaria, son más interesantes las primeras.

- La calculadora no siempre es el medio más rápido. Un buen cálculo mental proporciona una mayor rapidez en muchas operaciones, aunque parezca mentira. Es lastimoso observar la utilización de la calculadora para buscar ciertos resultados (25 × 8, por ejemplo) aunque la tengamos delante y esté encendida.

- La calculadora no está exenta de errores. Al igual que con el cálculo escrito, es necesario siempre acompañar el cálculo con un proceso de estimación y previsión, para la detección de errores importantes en el orden de magnitud. Los procesos automáticos son susceptibles de provocar grandes errores en los resultados.
- Puede proporcionar fácilmente distintos procesos de ejecución de un mismo cálculo. Precisamente por su rapidez nos permite que, cuando un cálculo debemos repetirlo, ir buscando sucesivas mejoras hasta obtener mecánicas mucho más reducidas. Basta pensar, por ejemplo, los distintos procesos que se suelen utilizar para trabajar con porcentajes con una calculadora.

Por último, también queremos destacar el papel que puede jugar la calculadora dentro de la progresión general de la enseñanza de las operaciones. Sin hacer un análisis exhaustivo, podemos hacer notar los siguientes aspectos:

– La calculadora puede ayudar a ampliar el conjunto de problemas que van a configurar los campos conceptuales de las operaciones. La posibilidad inicial de obtener cálculos de manera temprana permite centrar la atención en los aspectos semánticos de los problemas, profundizando en el conocimiento del significado de las operaciones.

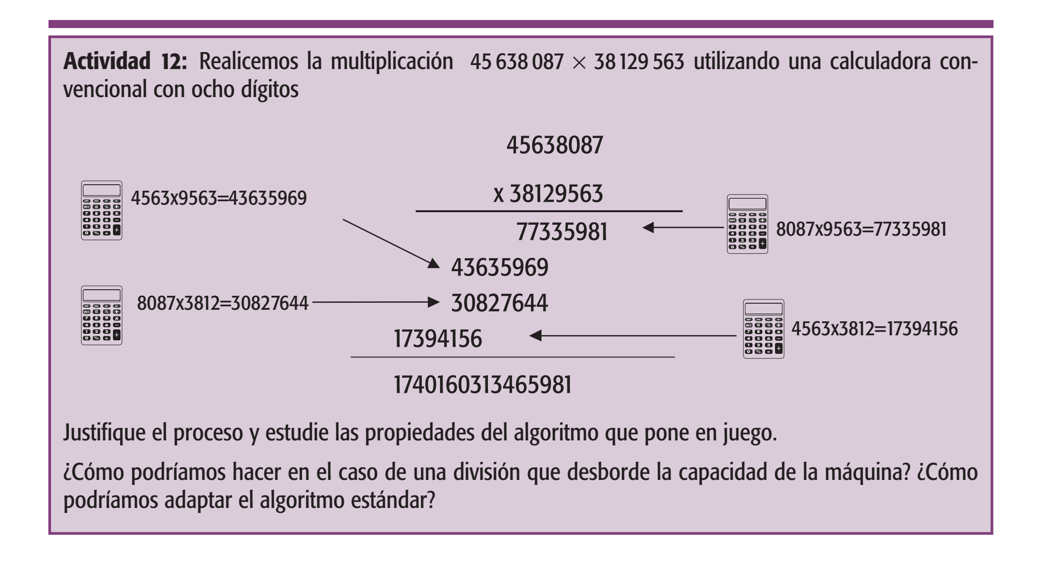
– La calculadora puede colaborar en la evolución de las técnicas artesanales, especialmente en el caso de la división euclídea. Al permitir disponer de un repertorio más amplio, el niño prestará su interés en el proceso de obtención de cociente y resto, sin el lastre de todos los cálculos intermedios.

Actividad 11: ¿Cuál es el procedimiento para obtener el cociente y el resto de una división euclídea con una calculadora convencional? ¿Qué conocimientos pone en juego?

– Para la construcción de técnicas definitivas la calculadora nos brinda importantes posibilidades para el planteamiento de actividades. Intentar obtener sólo con la calculadora el producto de dos números que desbordan su capacidad obliga a reflexionar acerca de nuestra técnica para multiplicar.

– En general, y dado que la calculadora obtiene los resultados con máxima rapidez, siempre que nuestro objetivo esté centrado en la modificación o evolución de determinados procedimientos artesanales de cálculo, podemos encontrar en ella recursos enormemente útiles.

En definitiva la calculadora es una herramienta poderosa tanto como máquina de calcular, como desde un punto de vista didáctico. No es legítimo desaprovecharla desde ninguno de los dos aspectos.



Actividad 12: Realicemos la multiplicación 45 638 087 × 38 129 563 utilizando una calculadora convencional con ocho dígitos

Justifique el proceso y estudie las propiedades del algoritmo que pone en juego.

¿Cómo podríamos hacer en el caso de una división que desborde la capacidad de la máquina? ¿Cómo podríamos adaptar el algoritmo estándar?

BIBLIOGRAFÍA

BUTLEN, D. y PEZARD, M. (1989): *Calcul mental, calcul rapide*, París, IREM. París VII.

ERMEL, (1995): *Apprentissages numériques CE2*, París, Hatier.

ERMEL, (1997): *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CM1*, París, Hatier.

ERMEL, (1999): *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CM2*, París, Hatier.

FIELKER, D. (1986): *Usando las calculadoras con niños de 10 años*, Valencia, Conselleria de Cultura, Educació i Ciencia.

GIMÉNEZ, J. y GIRONDO, L. (1993): *Cálculo en la Escuela*, Barcelona: Grao.

GÓMEZ, B. (1989): *Numeración y cálculo*, Madrid: Síntesis.

KAMII, C. (1994): *Reinventando la aritmética III*, Madrid: Visor, 1995.

MAZA, C. (1991): *Enseñanza de la multiplicación y división*, Madrid: Síntesis.

UDINA, F. (1989): *Aritmética y calculadoras*, Madrid: Síntesis.

VERGNAUD, G. (1985): *El niño, las matemáticas y la realidad*, Méjico: Trillas, 1991.

VERGNAUD, G. (1990): «La théorie des champs conceptuels», Recherches en *Didactiques des Mathématiques,* 10, 2.3, 133-170.

VERGNAUD, G. (2001): «Problemas aditivos y multiplicativos», en CHAMORRO, M.C. (Ed.) *Dificultades del aprendizaje de la matemáticas*, Madrid, MECD.

CAPÍTULO 7

Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional

ÍNDICE

Salvador Llinares

1. Introducción y objetivos

Un momento importante en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Primaria se presenta con la introducción de las fracciones, decimales y la razón. La importancia de este hecho radica en que hay que pensar en relaciones entre cantidades, en el uso de nuevos sistemas de símbolos para representar dichas relaciones y en la ampliación del sistema de numeración decimal. El inicio del trabajo con las fracciones en Primaria es la introducción a un nuevo «mundo matemático» para los alumnos que les va a llevar al desarrollo de una manera de pensar sobre las comparaciones relativas que se concretan en las situaciones de proporcionalidad al final de la Educación Primaria y al inicio de la Educación Secundaria. La importancia de desarrollar las fracciones, números decimales, porcentajes, razón y proporción de manera relacionada lo constituye el hecho de que forman una estructura que comparte ciertos aspectos matemáticos y psicológicos.

El conjunto de los números racionales constituye el dominio matemático desde el cual el currículum de Primaria adapta el contenido matemático. Para el maestro es importante considerar las posibles relaciones entre las características de este dominio matemático y los procesos de construcción del conocimiento de los aprendices. Por lo tanto, necesitamos ver el contenido matemático (en este caso los números racionales) en términos de lo que los aprendices deben saber hacer para construir la estructura conceptual que debemos asociar a los símbolos utilizados.

Por otra parte, la dificultad en la enseñanza-aprendizaje de los números racionales radica en que:

– Están relacionados con diferentes tipos de situaciones (situaciones de medida, con el significado de parte de un todo, o como parte de un conjunto de objetos, de reparto utilizadas como cociente, como índice comparativo usadas como razón, y como un operador).

– Pueden representarse de varias maneras (5/7, fracciones; 3/4, fracciones decimales; 0'75, expresiones decimales; 75%, porcentajes).

Los problemas siguientes muestran diferentes situaciones relacionadas con las fracciones, números decimales, razones o porcentajes:

Repartir 8 pizzas entre 3 amigos.

Un pastelero tiene que envasar 32,5 kg de harina en paquetes de 0,250 kg. ¿Cuántos paquetes necesita?

Un pastelero utilizó 10 litros de leche para hacer 20 tartas iguales. ¿Cuántos litros de leche necesitará para hacer 18 tartas iguales?

Pepe ha comprado 3/7 de pizza y Rosa 5/9 de pizza. ¿Quién ha comprado más pizza? (se supone que las pizzas son de igual tamaño).

Me he comido 1/2 de la pizza de Juan, y 2/3 de la pizza de Ana. ¿Cuánta pizza he comido? [se supone que las pizzas son de igual tamaño]

Los índices de aciertos de Gassol en los dos últimos cuartos de partido han sido 3 de 7 y 5 de 9. ¿En qué cuarto de partido ha estado más acertado?

Ana quiere comprarse una camisa que vale 20 euros. Su madre queda con ella que le pagará 2 euros por cada 3 euros que pague Ana. En este caso, ¿cuánto dinero debe sacar Ana de la hucha para comprarse la camisa?

¿Quién obtiene más pizza? Una persona A que es una de las 3 personas para repartirse 2 pizzas. La persona B que es una de las 8 personas para repartirse 5 pizzas.

Los alumnos durante la Educación Primaria deben llegar a familiarizarse con nuevos símbolos y nuevas exigencias cognitivas desde estas situaciones. Los nuevos números con los que los alumnos de Primaria se encuentran (2/3, 10/20, 32'5, 0'250) y las operaciones con ellos (sumar, restar, multiplicar y dividir) constituyen los fundamentos para comprender muchas de las situaciones cotidianas en las que están inmersos y se constituyen en instrumentos para desarrollar su competencia matemática en los siguientes años de escolaridad. El desafío en estos momentos es que estos nuevos números y las operaciones con ellos amplían los significados construidos con los números naturales. Sin embargo, las ampliaciones y/o rupturas en los significados procedentes de los números naturales no se realizan de manera fácil en el aprendizaje de los alumnos. El dominio de los números racionales es por tanto un campo conceptual constituido por un conjunto de situaciones cuyo dominio progresivo requiere la utilización de una variedad de procedimientos, de conceptos y de representaciones simbólicas que están en estrecha conexión.

Este capítulo tiene como objetivo realizar una aproximación a los significados de fracción, número decimal y razón como contenido en las matemáticas escolares de la Educación Primaria, las características del aprendizaje de estas nociones desde el punto de vista de la manera en la que parece que los alumnos construyen sus significados y las implicaciones que se pueden derivar sobre la enseñanza.

ESCENA 1. Sesión de trabajo de un grupo de maestros. El significado de la multiplicación de fracciones

Los maestros de una escuela han decidido realizar reuniones mensuales para coordinar la enseñanza de las matemáticas en su escuela. Ellos saben que esa decisión implica quedarse una tarde cuando los alumnos ya se han ido a sus casas, pero piensan que pueden beneficiarse de estas reuniones para organizar sus clases y para solucionar los problemas que surgen cuando enseñan matemáticas. Los maestros piensan que la reflexión conjunta puede ayudarles a mejorar su práctica. Este año han decidido centrarse en las fracciones, números decimales y razón. Es un contenido matemático que, aunque está principalmente centrado

en 5° y 6° curso, se empieza a estudiar en 3° y 4° curso, e incluso algunas ideas iniciales sobre la noción de fracción como una relación entre una parte y el todo en contextos de repartir y medir se puede introducir en los primeros cursos.

Antonio, el maestro de 6°, comenta a sus compañeros que en 6° él suele introducir la multiplicación de fracciones. Él cree que los alumnos no suelen tener dificultades en memorizar la regla que dice que para multiplicar fracciones lo que se hace es multiplicar los numeradores por los numeradores y los denominadores por los denominadores. Sin embargo, él está preocupado por el significado que tiene esa operación de multiplicar y las dificultades que tienen los alumnos en identificar correctamente aquellas situaciones en las que es adecuado utilizar la multiplicación de fracciones.

María, que está dando clase en 2°, dice que para que los alumnos comprendan el significado de la suma y resta con números naturales les propone problemas, y discute con sus alumnos los diferentes procedimientos de resolución de los problemas que sus alumnos plantean. María sugiere hacer lo mismo con los alumnos de 6° para la operación de multiplicar fracciones. Para ello plantea encontrar un problema que pueda resolverse con la operación

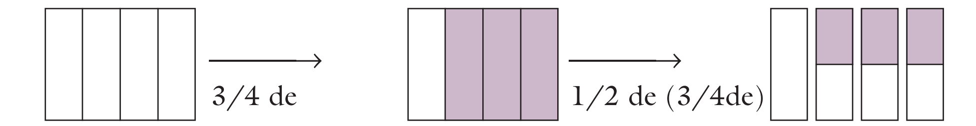
$$4/3 \times 1/5$$

María sugiere que al resolver el problema se utilicen dibujos o diagramas para poder explicar el significado del algoritmo de la multiplicación utilizando los dibujos.

Los maestros empezaron a mirar los libros de texto y materiales que tenían en la escuela para buscar situaciones que pudieran ser utilizadas como problemas para discutir con sus alumnos los significados que se vinculan al algoritmo de la multiplicación de fracciones. Antonio comenta que en las fracciones propuestas por María hay una fracción (4/3) mayor que 1 y que eso puede plantear algunas dificultades para encontrar un problema. Un problema que ha encontrado en un libro de texto, pero con las dos fracciones menores que la unidad, es:

Pedro ha comprado 3/4 de una pizza y se ha comido la mitad, ¿qué fracción de la pizza entera se ha comido?

María señala que este problema puede ayudar a presentar la expresión 1/2 de 3/4, pero que habría que subrayar que las dos fracciones en esta expresión no significan lo mismo y que la unidad a la que se están refiriendo tampoco es la misma. Mientras 3/4 es una fracción que representa una cantidad (siendo la unidad la pizza entera), la fracción 1/2 representa una acción (un operador) que al aplicarlo sobre la cantidad «3/4 de pizza», produce un resultado que es una fracción de la pizza entera (es decir, el resultado es una fracción que considera como unidad la pizza entera). Los dibujos que realizan, para explicar este proceso, son una pizza rectangular por la facilidad de hacer las partes congruentes.



María y Antonio coinciden en que hay situaciones en las que se puede aplicar la multiplicación de fracciones, que pueden ser idóneas para relacionar dos significados de las fracciones (una relación de una parte con un todo y como un operador), además de subrayar la noción de unidad que muchas veces está implícita en el propio manejo de símbolos y que no se insiste lo suficiente. Antonio y María se dan cuenta que cambiando las fracciones en la situación anterior, y comparando los procedimientos, acciones y simbolizaciones utilizadas y analizándolas con sus alumnos pueden ser un buen contexto para introducir algunos significados para la multiplicación de fracciones.

Pedro ha comprado 3/4 de una pizza y se ha comido la mitad de lo que ha comprado, ¿qué fracción de la pizza entera se ha comido?

Pedro ha comprado 4/3 de pizza y se ha comido 1/5 de lo que ha comprado, ¿qué fracción de la pizza entera se ha comido?

Antonio sugiere que el mismo análisis debería realizarse si la operación hubiera sido la multiplicación de números decimales, ya que debería ser importante fijarse en el significado de los números y en el significado de la operación. María propone ver qué saldría si piensan en la operación 0,3 × 0,25.

– ¿Qué significados podrían tener los números 0,3 y 0,25?
– ¿Qué significados debería tener la operación de multiplicar (simbolizada por «×»).
– ¿Qué situaciones se podrían plantear coherentes con dichos significados?
– ¿Cómo se podría representar esta multiplicación?

2. Matemáticas escolares: fracción, decimales y razón

2.1. Interpretaciones para los números racionales

Un número racional a/b tiene muchas interpretaciones, lo que determina como objetivo de enseñanza que los alumnos lleguen a dotar de significado a las diferentes interpretaciones, pero también establecer relaciones entre ellas. Cuatro son las interpretaciones que vamos a considerar: medida, reparto, operador y razón.

- Medida: relación entre una parte y un todo (sea éste continuo o discreto). Las situaciones que configuran esta interpretación del número racional implican situaciones de medida y por tanto consideran un todo dividido en partes. El número racional indica la relación entre la parte y el todo. Por ejemplo,

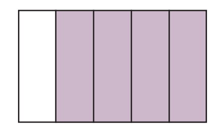
  Pedro se ha comido los 4/5 de una pizza.

  3/5 de las fichas que tengo son rojas

  Juan ha pintado el 60% de la pared

Los modos de representación que podemos usar son:

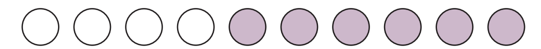
– Las que se apoyan en el modelo «área».



– Una representación de 4/5, considerando el rectángulo grande como la unidad y para indicar la relación entre la parte sombreada y el rectángulo grande (o una representación de 1/5 considerando el rectángulo grande como unidad y para indicar la relación entre los rectángulos sin sombrear y el rectángulo grande).

– Una representación de 5/3 si consideramos la parte sombreada la unidad.

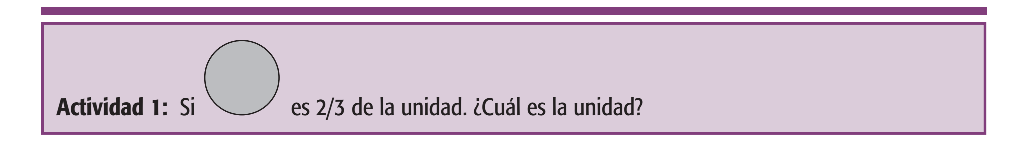
– Las que se apoyan en el modelo conjunto (magnitud discreta).



El modelo conjunto puede ser:

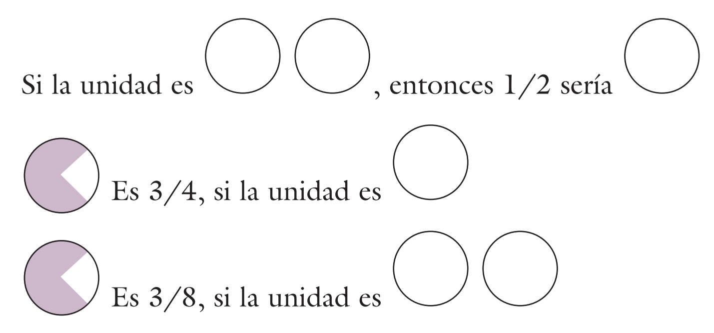
- Una representación de 3/5 si la unidad es el conjunto total de fichas y la parte el grupo de fichas sombreadas, y considerando cada fracción unitaria (1/n) formada por un grupo de dos fichas.
- 6/10 en el caso anterior si consideramos cada fracción unitaria (1/n) formada por un grupo de una ficha.
- 5/3 si la unidad es el grupo de fichas sombreadas y la parte el grupo total de fichas considerando la fracción unitaria 1/3 formada por dos fichas).
- 10/6 en el caso anterior con cada fracción unitaria formada por una ficha.

La noción de unidad y de partes congruentes. El desarrollo de la idea de unidad se pone de manifiesto en las tareas que consisten en reconstruir la unidad dada la representación de la parte



Actividad 2: ○ ○ ○ ○ Es 2/3. Encuentra la unidad

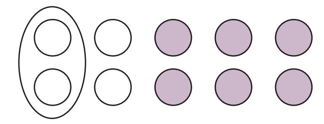
En el desarrollo del significado de unidad (significado para el todo) la información que puede proceder desde la representación usada puede proporcionar información diferente ya que la misma «cantidad» puede ser representada por números diferentes.



Una reflexión análoga puede hacerse utilizando magnitudes discretas (por ejemplo fichas). El significado de la unidad y lo que conlleva en el desarrollo de la competencia con los números racionales al principio de la enseñanza de las fracciones es de suma importancia. En cada nueva situación, los alumnos deberían acostumbrarse a preguntarse «¿cuál es la unidad?».

La otra idea importante en la interpretación medida es la noción de parte (subgrupos) equivalente. En este sentido,

- La parte puede estar subdividida en otras partes.
- El tamaño (la cantidad) de una subparte (subgrupo) depende del número de partes que se realicen.
- La manera en la que pensemos sobre la unidad y la parte nos proporcionará representaciones simbólicas diferentes (por ejemplo, 3/5 = 6/10 en la representación de fichas anterior). Esta idea está vinculada a la conceptualización de la fracción unitaria (1/n) como «unidad» con la que «contar». En el caso anterior la diferencia en la representación simbólica generada se apoya en considerar como fracción unitaria 2 fichas o 1 ficha.



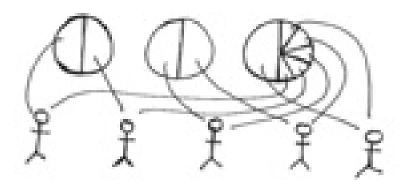
La noción de equivalencia se apoya en la idea de realizar diferentes divisiones que resultan en la misma relación entre la parte y el todo. Desde este contexto, la actividad de realizar divisiones múltiples debe emparejarse con la actividad de repartos equitativos como fundamentos para la comprensión de los números racionales. Los profesores deberían animar a los alumnos a realizar dibujos y que

puedan producir diferentes maneras de dividir la unidad. En este tipo de situaciones se debería animar a los alumnos a escribir símbolos para las diferentes divisiones realizadas.

– Reparto: cociente y números decimales

Juan tiene que repartir 3 pizzas entre 5 amigos. ¿Qué fracción de pizza le corresponde a cada amigo?

Los números racionales pueden ser vistos como un cociente, es decir, como el resultado de una división en situaciones de reparto. 3/5 es la cantidad de pizza que le corresponde a cada amigo de Juan en la situación de reparto anterior. Lo que importa en este tipo de actividades es el proceso a través del cual los alumnos hacen el reparto. Por ejemplo en la tarea propuesta, un alumno puede dividir 3 pizzas en mitades (1/2), dar a cada uno de los 5 niños una mitad de pizza y le sobra otra mitad. A continuación divide esta mitad en 5 partes y da a cada uno de los niños una de esas partes (1/5 de 1/2).



Cada uno de los niños ha recibido una cantidad de pizza que a nivel simbólico se puede representar por:

$$1/2 + (1/5 \text{ de } 1/2)$$

Otro niño puede repartir inicialmente cada pizza entre los 5 niños (por lo que cada niño recibir de cada pizza 1/5). Lo que recibe cada niño expresado a nivel simbólico es:

$$1/5 + 1/5 + 1/5 = 3 \text{ veces } 1/5 = 3 \times 1/5$$

Estas situaciones de reparto llevan implícita la idea de que la parte que le toca a cada niño es equivalente en tamaño (partes congruentes) aunque no necesariamente de la misma forma.

En las situaciones de reparto se debería animar a los niños a que realizaran dibujos de las acciones y simbolizaran las diferentes partes. Las ideas de suma y equivalencia aparecen de manera natural en este tipo de situaciones. Los alumnos deberían buscar diferentes partes equivalentes en los diferentes repartos realizados y expresiones simbólicas para cada una de ellas como una manera de relacionarse con las operaciones.

Por otra parte, la idea de división está intrínsecamente vinculada a la idea de número racional. Como hemos visto anteriormente, las fracciones se forman mediante divisiones. Las fracciones decimales se forman con divisiones en 10 partes de una unidad, y realizando divisiones sucesivas. En este caso, situar un

número racional en la recta numérica depende de la división de la unidad en partes equivalentes.

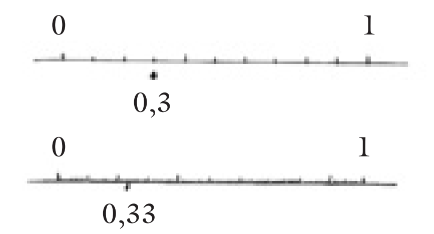
La idea de aproximaciones sucesivas. El significado de la fracción como cociente puede producir, al realizar la división, una expresión decimal finita o infinita. Por ejemplo,

- 1/3 produce una expresión decimal infinita 0,3333…
- 1/4 produce una expresión finita, 0,25.

Las expresiones decimales finitas tienen la ventaja de que es posible encontrar una «fracción decimal» equivalente y por tanto una fracción equivalente con el denominador con potencias de 5 y 2 (los divisores de 10), por ejemplo:

$$1/4 = 0,25 = 25/100$$

Ante la tarea de convertir una fracción en una expresión decimal mediante una división, como los restos de la división, deben ser menores que el denominador, entonces sólo existe un número finito de restos de la división diferente. Por lo que, si el resto no llega a ser cero (con lo que obtendríamos una expresión decimal finita) habrá un momento en el que se repetirá algún resto y obtendremos el inicio de un nuevo ciclo. Tenemos así las expresiones decimales infinitas pero periódicas. En el caso de las expresiones decimales infinitas, periódicas o no, podemos usar aproximaciones (expresiones decimales finitas) con un grado de aproximación tan grande como se quiera teóricamente. Utilizando la recta numérica como una manera de visualizar la posición del número, al realizar divisiones en cada intervalo, cuando el intervalo [0,1] es dividido en diez partes podemos situar el número 1/3 con un error menor que una décima, cuando el intervalo está dividido en décimas (1/10) × 1/3 estará situado entre [0,3; 0,4]. Si cada sub-intervalo lo dividimos en diez partes, podemos situar 1/3 con una aproximación de centésimas (1/100) × 1/3 estará situado entre [0,33, 0,34]. Cada vez que hagamos diez divisiones en cada uno de los sub-intervalos obtenemos una aproximación diez veces mayor. De ahí la potencialidad de las fracciones decimales, correspondientes a las expresiones decimales finitas, como aproximaciones determinadas de una expresión decimal infinita.



De esta forma los decimales finitos se pueden usar para aproximar cualquier número con la exactitud deseada (que se suele denominar «error» en los primeros años de Secundaria, y en Primaria se suele indicar por la unidad del sistema de numeración decimal con la que se aproxima, como vimos en la escena 2 del capítulo 1) (por ejemplo, «aproximar el cociente con décimas o centésimas»).

Posteriormente en Secundaria la técnica de aproximaciones sucesivas se amplía a números irracionales (por ejemplo $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, ..., etc.) de ahí la importancia del significado de los números decimales construido en Primaria vinculado al significado del sistema de numeración decimal y a la noción de aproximación sucesiva.

- *Operador. Significado funcional de la preposición «de»*

La interpretación del número racional como operador se apoya en el significado de función. Un número racional actuando sobre una parte, un grupo o un número modificándolo. Por ejemplo «3/5 de» es visto como una sucesión de «multiplicar por 3, y dividir por 5» (o dividir por 5 y multiplicar por 3).

$$3/5 \text{ de } P = 1/5 \text{ de } (3P) = 3\ (P/5)$$

Es decir, «3/5 de» significa:

– 3 veces 1/5 de la unidad.

– 1/5 de (3 veces la unidad).

En contextos físicos la interpretación operador está vinculada a aumentos o disminuciones. El operador «3/5 de» es la sucesión de una multiplicación (hace una cantidad tres veces su tamaño original) y una división (reduce una cantidad 1/5 de su tamaño inicial).

Reducir la longitud del siguiente segmento en 3/5 de la longitud inicial,



con la interpretación operador el número racional 3/5 proporciona la relación entre el número inicial y el resultado. Una representación de los resultados producidos por un número racional como operador es una tabla:

Entrada	10	15	20	50
Salida	6	9	12	30

Los alumnos, dada una tabla, pueden realizar actividades de identificar el operador, o identificar la salida dada una entrada (o viceversa, la entrada dada una salida).

- *Índice comparativo: razón*

Una razón es una comparación de dos cantidades (de igual o diferente magnitud).

La razón 12 km en 9 minutos (12/9) compara km y minutos.

La razón 4 huevos blancos por 2 huevos marrones en un pack de 6 huevos (4:2).

La fracción 4 huevos blancos en el pack de 6 huevos (2/3).

Ana quiere comprarse una camisa que vale 20 euros. Su madre queda con ella que le pagará 2 euros por cada 3 euros que pague Ana. En este caso ¿cuánto dinero debe sacar Ana de la hucha para comprarse la camisa?

La relación entre chicos y chicas en el aula es 3 chicas por cada 2 chicos (3:2)

Una planta medía 11 cm, a las dos semanas medía 14 cm. ¿Cuánto ha crecido en relación a lo que media hace dos semanas? (3/11)

El 33% de los alumnos han suspendido el examen de matemáticas (33:100).

En una fiesta hay 24 comensales en una mesa con 16 pizzas. Pero hay que reorganizar las mesas. ¿Cómo los sentamos en 2 mesas (o 3 mesas) y repartimos las pizzas para que sigan teniendo lo mismo?

La información que proporciona una razón es distinta del sentido cardinal de los números naturales. Las razones pueden ser comparaciones parte-parte en un conjunto o comparaciones parte-todo. En los ejemplos anteriores la relación entre chicos y chicas es una comparación parte-parte del conjunto total de la clase. En esta situación nosotros no conocemos cuál es el número total de alumnos de la clase, pero la razón nos da información sobre la relación entre chicos y chicas. En el ejemplo 3, la razón 3/11 nos proporciona información sobre lo que ha crecido la planta en dos semanas en relación a su tamaño inicial. Es una relación parte-parte considerando el todo la altura en estos momentos, que viene dada por la altura inicial más lo que ha crecido (11 + 3 = 14). Por otra parte, el ejemplo 4 muestra un índice comparativo estandarizado, un porcentaje, que muestra una comparación parte-todo (33 de 100).

La interpretación parte-todo descrita antes puede ser considerada un caso particular de las razones parte-todo. La generalidad de la interpretación como razón consiste en que nos permite comparar cantidades de magnitudes diferentes, mientras que en la interpretación parte-todo en un contexto de medida sólo nos permite comparar cantidades del mismo tipo. Con la interpretación razón, la representación de 10 fichas (4 de ellas rojas) usada en la interpretación parte-todo puede tener el significado de 2:3 (o 3:2), indicando un índice comparativo entre el número de partes blancas y oscuras (o relación entre el número de partes oscuras y blancas). En el modelo conjunto (magnitud discreta), la representación anterior puede tener el significado de 4:6 (o 6:4) relación entre fichas blancas y oscuras (o relación entre número de fichas oscuras y blancas) considerando cada ficha.

3. Pensamiento matemático de los estudiantes: hacia la competencia matemática con los números racionales

Como se ha descrito en el capítulo 1, una de las dimensiones de la competencia matemática es la comprensión conceptual de las nociones concebida

como la posibilidad de establecer relaciones entre diferentes nociones y procedimientos. También, el hecho de desarrollar destrezas vinculadas a la comunicación plantea la necesidad de representar las ideas sobre las que se va a hablar. Para poder comunicar y usar las ideas matemáticas en diferentes contextos es necesario utilizar representaciones externas de dichos conceptos. Algunas de estas representaciones externas han sido mostradas a lo largo de este capítulo.

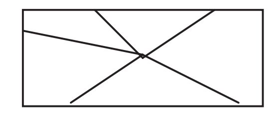
ESCENA 2. El caso de Carlos y Javier: el uso de los modos de representación en la construcción y comunicación del significado para las fracciones

Cuando he enseñado las fracciones, nunca he tenido muchas dificultades. Mis alumnos normalmente han entendido rápidamente la idea de fracción. Con las operaciones ocasionalmente he tenido más dificultades, pero proponiéndoles mucha práctica he conseguido que una mayoría de ellos superara bien los exámenes. Este año estoy dando 5° y, como el año pasado ya vimos alguna cosa de fracciones, pensé que podríamos empezar este tema recordando alguna cosa del año pasado. Para ello, coloqué la siguiente tarea en la pizarra:

¿Qué son los 5/4 de  ?

Me di cuenta de que había algún grupo de alumnos que no entendían bien la tarea.

Mientras estaban realizando este ejercicio, me acerqué a Javier, y le repetí la tarea, pidiéndole que me explicara cómo lo estaba haciendo. Él empezó a dividir en partes un rectángulo que tenía pintado en un folio, y dibujó lo siguiente:



Luego sombreó cada una de las partes para indicar que tenía cinco cuartos.

Para intentar obtener más información sobre el significado de fracción que se podía tener en ese momento, propuse a Carlos la siguiente tarea, en la que se utilizan fichas como modo de representación. En estos momentos, sabía que no se había utilizado este modo de representación en la introducción de la idea de fracción, pero intentaba ver lo que sucedía.

¿Cuántas fichas son los 2/3 de 6 fichas?

En el proceso de resolución, Carlos dibujó un círculo, lo dividió en tres partes distintas y colocó dos fichas sobre el círculo, dando como respuesta 2 fichas.

**

La situación descrita en la escena 2 en la que Javier y Carlos realizaban una manipulación de la representación de 5/4 y 2/3 para responder a las tareas propuestas nos está dando información sobre su representación interna de los conceptos y los significados asociados a la idea de unidad y parte congruente. En este tipo de situaciones podemos hablar de dos tipos de influencias. Por una parte, de las características de las representaciones internas de los conceptos (en la escena 2 la noción de unidad, y de parte congruente) hacia la actividad del aprendiz en una determinada tarea, y por otra, la actividad del aprendiz con diferentes tareas influirá en las características de las representaciones internas (en su comprensión).

La comprensión de los números racionales será mejor en la medida en que las diferentes formas de verlos estén relacionadas (conectadas). Por ejemplo, la relación entre 3/4, 0,75, 75%, 75/100. Desde una perspectiva general, la comprensión está vinculada al establecimiento de conexiones entre diferentes representaciones internas de los conceptos. Desde esta idea las conexiones entre representaciones internas se pueden estimular mediante la construcción de conexiones entre las correspondientes representaciones externas.

Lo que se está planteando es establecer conexiones entre estos diferentes modos de representación como una forma de favorecer las conexiones entre las representaciones internas que ayudan a caracterizar la comprensión de los números racionales. Desde este posicionamiento teórico para entender la comprensión de las nociones matemáticas en Primaria se pueden derivar principios didácticos sobre los que organizar la enseñanza.

Algunas características del desarrollo de la competencia con los números racionales son:

- Los estudiantes poseen nociones informales de repartos equitativos, medidas y sobre proporciones.
- El desarrollo de la competencia con los números racionales es un proceso largo que se inicia en la Educación Primaria pero va más allá de la Educación Primaria.
- Las relaciones entre las diferentes dimensiones de la competencia matemática se considera clave para el desarrollo en el dominio de los números racionales.

Las nociones informales de los alumnos de repartos equitativos y medida proporcionan el contexto fenomenológico sobre el que construir los significados vinculados a los números racionales. Desde esta perspectiva, las actividades de reparto equitativo y medida en relación a los números racionales desempeñan el mismo papel que las actividades de contar en relación a la construcción de los significados de los números naturales. En este tipo de actividades, una idea que está implícita es la de «partes equivalentes». El trabajo inicial con mitades, cuartos y octavos realizado en los primeros años de Primaria con las actividades de realizar dobleces en un folio (unidad) y desarrollar el lenguaje vinculado a dichas acciones («una mitad», «un cuarto» y ...) constituye el inicio de la enseñanza para las fracciones, que posteriormente se completa con los

tercios y los quintos. Posteriormente este conocimiento informal de los alumnos de las situaciones de repartos equivalentes permite la introducción de situaciones que muestran la equivalencia de fracciones

«Hemos repartido 3 pizzas entre 5 niños. ¿Cuántas pizzas necesitaremos si hay 15 niños para que todos reciban la misma cantidad?».

3.1. La construcción de los significados: un modelo recursivo

El conocimiento informal de los alumnos descansa en el uso de representaciones (externas e internas) junto con instrumentos cognitivos, como son la noción de unidad, y repartos equivalentes (mecanismos constructivos), y el uso del lenguaje. Junto con la idea de «todo» y reparto equitativo los alumnos utilizan la idea de contar como un mecanismo constructivo con lo que se subraya el papel que pueden desempeñar las fracciones unitarias (1/n) en el proceso de construcción del significado de los números racionales.

Kieren (1993) identifica cuatro formas de conocer los contenidos matemáticos relativos a los números racionales:

– Conocimiento etnomatemático, que es el que poseen los alumnos, derivado de las situaciones en las que normalmente viven. Por ejemplo, su conocimiento de los repartos equitativos, su conocimiento de las partes en las que se reparte una pizza en relación a la pizza entera, etc.

– Conocimiento intuitivo, que supone el uso de los instrumentos cognitivos (mecanismos constructivos), representaciones y el uso informal del lenguaje.

– Conocimiento técnico-simbólico es el que resulta de trabajar con expresiones simbólicas los números racionales.

– Conocimiento axiomático-deductivo, corresponde al conocimiento de la estructura matemática.

Lo que sigue son algunos protocolos de Kieren (1993) que ayudan a ejemplificar estas diferentes maneras de conocer.

En Educación Primaria una característica importante de esta manera de entender las formas de conocer los números racionales radica en las relaciones que se pueden establecer entre los tres primeros tipos de conocimiento. Es decir, de qué manera las representaciones y el lenguaje utilizados ayudan a dotar de significado a los símbolos y su manipulación. Una característica de estas diferentes maneras de conocer es su carácter recursivo. Es decir, los alumnos pueden utilizar ideas procedentes de diferentes maneras de conocer para justificar sus acciones. Por ejemplo, se puede probar que 6/9 es equivalente a 4/6 en un nivel simbólico buscando dos fracciones con el mismo denominador, o utilizando una

Actividad 3: *¿quién obtiene más pizza?*

Una persona A que es una de las 3 personas para repartirse 2 pizzas.

La persona B que es una de las 8 personas para repartirse 5 pizzas.

Juan (8 años). La misma cantidad. Le doy a cada uno la mitad y me sobra un poco.

(La validez del argumento se apoya en su experiencia diaria)

Esteban & Ross (9 años). Ellos no coinciden. Ross divide las primeras 2 pizzas cada una en 3 partes y las segundas 5 pizzas cada una en 8 partes. Él realiza un argumento físico «encajando» 5[1/8 trozo], que empareja con 2[1/3 trozo]. Esteban realiza el argumento contrario. Ellos coinciden «están terriblemente próximos».

(La validación utiliza instrumentos y resultados intuitivos)

Jaime (12 años)

2/3 más ya que 1/3 de 1/2 es 1/6 y 1/2 + 1/6 = 3/6 + 1/6 = 4/6 = 2/3, y

1/2 + 1/8 = 4/8 + 1/8 = 5/8 y 1/6 > 1/8 ya que el denominador es más pequeño, por lo que las piezas son más grandes.

(La validación procede de la intuición y de argumentos simbólicos).

Samuel (12 años) 2/3 es mayor

2/3 = 16/24

5/8 = 15/24

16/24 > 15/24

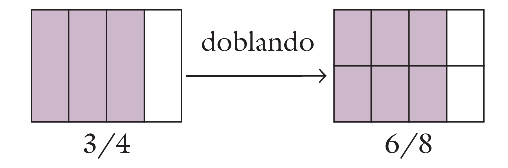
2/3 > 5/8

(Validación simbólica)

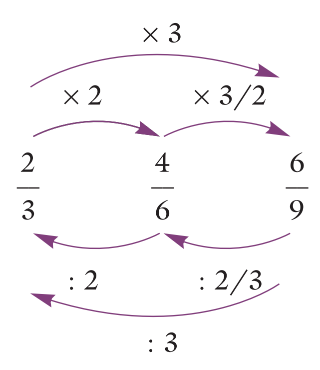
Fuente: Kieren, (1993): «Racional and fraccional number: From Quotient Fields to Recursive Understanding. En T. Carpenter, E. Fennema & T Romberg (Eds.) *Rational Numbers. An Integration of Research*. Lawrence Erlbaum Associates: Hillsdale, NJ. (pp. 70).

representación en forma de rectángulo, y comprobar que la dos fracciones representan la misma cantidad. La posibilidad de justificar las acciones a nivel simbólico y utilizando representaciones y manipulaciones concretas se apoya en la naturaleza recursiva del pensamiento.

Una manera de entender el proceso de construcción del conocimiento y, por tanto, de la noción de comprensión se inicia con *las acciones del aprendiz* en un punto que permite asumir que es el punto de inicio. En el caso de las fracciones pueden ser las acciones de dividir en parte equivalentes o las actividades de reconstruir la unidad. En el caso de la introducción a los algoritmos de la suma o la resta de fracciones sería la posibilidad de realizar nuevas divisiones en una parte para poder renombrarla. Las actividades de este estilo pueden permitir al aprendiz *construir representaciones internas* de la noción de fracción o de la de fracción equivalente vinculada a las representaciones externas utilizadas y al tipo de acción realizada. Trabajar en problemas de repartos equivalentes anotando simbólicamente lo realizado ayuda a la construcción de estas representaciones internas.



Las actividades de comunicar y explicar lo realizado ayudan en el proceso de observar semejanzas y patrones en las acciones y símbolos utilizados y se apoyan en el uso de las representaciones internas (*poseer representaciones internas*). Poseer y usar las imágenes formadas por las representaciones internas implica empezar a considerar dichos aspectos de los números racionales como objetos mentales y puede permitir empezar a observar patrones y semejanzas. En estos momentos es cuando los aprendices pueden observar que para generar una familia de fracciones equivalentes pueden hacerlo multiplicando o dividiendo el numerador y el denominador por el mismo número. En este nivel de comprensión el aprendiz puede generar una familia de fracciones equivalentes incluso en el caso de que físicamente no pueda realizarlo o le resulte difícil hacerlo.

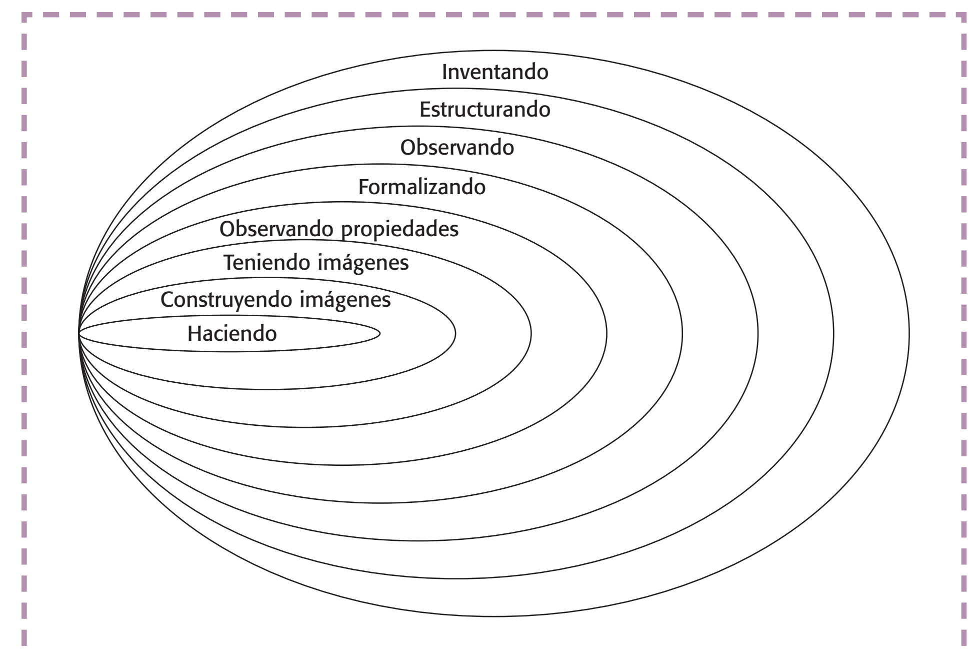


Existen otros niveles de comprensión que permiten al aprendiz *formalizar* estas relaciones y patrones. En el ejemplo que estamos considerando cuando se es capaz de pensar en la forma de obtener una familia de fracciones equivalentes pensando que se cumple para toda fracción.

«Sea cual sea la fracción a/b, podemos obtener una fracción equivalente ak / bk, siendo k un número natural.»

Este proceso sigue y podemos imaginarnos cómo se podría llegar a construir niveles de comprensión cada vez más sofisticados en los que el uso de sistemas de símbolos específicos y lenguaje adecuado permite manejar objetos mentales cada vez más abstractos. El cuadro siguiente muestra un esquema del modelo para una teoría recursiva de la comprensión matemática como se ha descrito.

En las secciones siguientes analizaremos con más detalle los procesos de construir imágenes (representaciones internas) desde el proceso de adscribir significados a las representaciones externas y la acción sobre ellas.



Fuente: Kieren (1993) Racional and fraccional numbers. From quotient fields to recursive understanding. En T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.) *Rational Numbers. An Integration of Research*. Lawrence Erlbaum: Hillsdale, NJ, (p. 72)

3.2. Modos de representación y su uso como instrumentos de aprendizaje

Los números racionales son construcciones mentales que permiten organizar algunas situaciones, como vimos en el segundo apartado de este capítulo. Para poder comunicarnos y compartir estas ideas es necesario representarlas para lo que utilizamos diferentes modos de representación:

– Representaciones materiales como tangram, cartulinas, números en color (regletas Cuisenaire, etc.), bloques multibase, fichas...

– Símbolos, 0,45, a/b, 7/3, 8:6.

– Dibujos y diagramas.

– Lenguaje.

Los modos de representación son instrumentos para comunicar, pensar, calcular y compartir información. Visto de esta manera y considerando la caracterización de la competencia matemática realizada en el Capítulo 1, los modos de representación apoyan el desarrollo de la competencia matemática al permitir desarrollar procesos de comunicación. El uso de diferentes modos de representación para comunicar las ideas matemáticas permite que los aprendices aprendan

a evaluar formas alternativas de representar sus ideas, y poder juzgar la idoneidad de las representaciones utilizadas por los compañeros.

Desde esta perspectiva del desarrollo de la competencia matemática, aprender a construir e interpretar las representaciones implica aprender a participar en «prácticas» de comunicar y razonar en las que se utilizan las diferentes representaciones. Este uso de las representaciones para generar competencia matemática implica que si los alumnos simplemente realizan tareas de construir representaciones que ya se le proporcionan, no pueden generar oportunidades de aprender las ventajas y limitaciones de las diferentes formas de presentación, o cómo llegar a utilizar estas representaciones como instrumentos con los que generar competencia matemática (desarrollando cada una de las cinco dimensiones: comprensión conceptual, eficacia en los procedimientos, pensamiento estratégico, comunicación y actitudes). Desde aquí se derivan dos tipos de actividades que están vinculadas con el uso de las representaciones como instrumentos de aprendizaje:

– Construir.

– Interpretar.

Una precaución hay que tener en estos momentos, las representaciones no deben ser enseñadas como un fin en sí mismo, sino como instrumentos para generar la competencia matemática (construir comprensión y comunicar información, por ejemplo). Si las representaciones deben ser usadas como instrumentos para desarrollar la comprensión y la comunicación, los alumnos deben vincularlas a la consecución de un fin (resolución de problemas…). Finalmente, para que una cosa funcione como una representación de algo, los aprendices deben interpretarla y darle significado. Esto se puede conseguir cuando los alumnos puedan implicarse en aprender a construir representaciones e interpretarlas participando en discusiones sobre las ventajas e inconvenientes de cada una de ellas.

Las representaciones se construyen para propósitos específicos durante la resolución de problemas y cuando se pretende comunicar a otros estos intentos de resolución. De esta manera, las representaciones con frecuencia proporcionan algún tipo de modelo del pensamiento de los estudiantes. Así, durante el proceso de resolución de una tarea, los alumnos pueden construir representaciones basadas en una comprensión parcial de las nociones sobre las que se apoya.

• Significados adscritos a las representaciones

Algunas veces podemos suponer que las representaciones de las nociones matemáticas conllevan en sí mismas los significados que quieren transmitir. En la enseñanza-aprendizaje de las fracciones algunas veces se suele olvidar que para que algo funcione como una representación de algo, alguien tiene que interpretarla y darle significado. Por ejemplo, la figura de un polígono suele utilizarse para representar alguna idea relativa a las fracciones. Así, un rectángulo con cinco

divisiones y tres de ellas sombreadas suele utilizarse para representar la fracción 3/5. Muchas veces el significado de la unidad está implícito en el propio uso de la representación, y no es discutido. La necesidad de discutir los diferentes significados asociados a las representaciones se manifiesta en las siguientes tareas que ponen de manifiesto que la representación utilizada no conlleva de manera unívoca un significado. Es necesario entonces considerar como variable didáctica el proceso de adscripción de los significados a las representaciones como parte ineludible en la interacción entre alumnos y entre profesor y alumnos. El proceso de comunicación en el aula es el medio por el cual se da el proceso de adscripción de significados por los diferentes interlocutores.

Actividad 4:

¿Puedes ver 3/5 de alguna cosa en la figura?

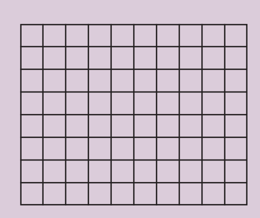
¿Puedes ver 5/3 de alguna cosa?

¿Puedes ver 5/3 de 3/5?

¿Puedes ver 2/3 de 3/5?

¿Puedes ver 1 dividido entre 3/5?

Actividad 5:



Ante una cuadrícula 8 × 10 como la siguiente

Sombrea 0,725 de la cuadrícula.

Sombrea el 33% de la cuadrícula.

Sombrea 17/20 de la cuadrícula.

Explica cómo lo haces.

En este sentido, los dibujos llegan a ser representaciones cuando los alumnos les den significado para interpretarlos. Así, construir representaciones e interpretarlas son dos actividades que apoyan los procesos de comunicación y la construcción de imágenes (representaciones internas). Por lo tanto, comprender una representación incluye conocer que puede haber diferentes interpretaciones asociadas. De ahí que tareas como las anteriores pueden ayudar a que los alumnos

aprendan a construir representaciones internas flexibles en las que desarrollar las convenciones de la interpretación de los dibujos.

• Relación semántica-sintáctica

Cuando los estudiantes son introducidos en el manejo de los símbolos, por ejemplo en la introducción de los algoritmos de cálculo, sin considerar los significados implícitos, los alumnos pueden cometer errores. Dichos errores muestran la influencia que ejerce lo aprendido sobre los números naturales en este nuevo dominio numérico. Algunos de estos errores son:

– Al plantear la suma 2/3 + 7/4 dar como respuesta 9/7 indicando que han sumado los numeradores y los denominadores.

– Cuando se les pide estimar el resultado de 12/13 + 7/8, decir que puede ser 19 o 21.

– Cuando los alumnos pueden pensar que 1/5 es mayor que 1/3 porque 5 es mayor que 3.

– Que 4/5 y 5/6 son iguales porque la diferencia entre el numerador y el denominador es 1 en los dos casos.

O cuando usan los decimales

– Ante la operación 6 + 0,2 responden 0,8.

– Cuando se dice que 0,33 es mayor que 0,4 ya que 33 es mayor que 4.

– Cuando consideran que no hay ningún número decimal entre 2,34 y 2,35.

– Ante una suma de números decimales como 2,45 + 0,7 colocan los números en forma vertical alineándolos por la derecha sin considerar el valor de las unidades.

$$\begin{array}{r} 2{,}45 \\ +\ 0{,}7 \\ \hline \end{array}$$

Estos errores muestran que los alumnos pueden llegar a manejar los símbolos (sintaxis) sin considerar los significados asociados (semántica). Los errores sistemáticos que pueden realizar los alumnos, como los señalados con anterioridad, se pueden considerar como instrumentos de diagnosis útiles para el profesor, mostrando las características de conocimiento incompleto que están construyendo los alumnos.

Una manera de ayudar a que los alumnos manejen los símbolos con los significados vinculados es proporcionar desde un primer momento experiencias de repartir cantidades de manera equitativa utilizando dibujos, materiales concretos y conectar estas acciones con los símbolos matemáticos. Actividades que potencian la comprensión de los alumnos de la noción de unidad ayudan a desarrollar una mejor vinculación entre los aspectos semánticos y sintácticos en

el manejo de los símbolos para los números racionales. Ejemplos de este tipo de tareas ya han sido descritos al principio de este capítulo.

En el dominio de los cálculos con las fracciones y los números decimales un aspecto importante que ayuda a potenciar la vinculación de los significados con la manipulación de los símbolos es desarrollar aproximaciones utilizando situaciones:

- *Ana ha utilizado 3/2 de kilo para pintar una pared. Juan ha utilizado 5/4 de kilo. ¿Cuánta pintura han utilizado entre los dos?*
- *Inés ha comprado 3/5 de pizza, pero ha metido en el microondas la mitad de la que ha comprado para calentarla. ¿Qué fracción de una pizza ha metido en el microondas?*
- *Tengo 5 tazas de mermelada. La receta de pastel me dice que se necesitan 2/3 de una taza para hacer un pastel. ¿Cuántos pasteles puedo hacer?*

Actividades vinculadas a estas situaciones pueden ser:

– Modelar la situaciones con dibujos o materiales concretos.

– Describir los procesos de solución generados.

– Explicar por qué las soluciones producidas tienen sentido.

Actividad 6: Dada la expresión 1/2 + 2/3,

– Utilizando folios (magnitud continua) como material concreto modela el proceso de obtención del resultado y relaciona las manipulaciones y acciones realizadas con los pasos que constituyen el algoritmo.

– Utilizando fichas (magnitud discreta) como concreto modela el proceso de obtención del resultado y relaciona las manipulaciones y acciones realizadas con los pasos que constituyen el algoritmo.

– Discute con tus compañeros las diferencias entre los dos procesos de modelación desarrollados (con folios y con fichas), ¿qué modo de representación parece favorecer la relación entre la modelación y los diferentes pasos dados en el algoritmo realizado a nivel de símbolos?

– Redacta un problema que pueda resolverse con esta suma de fracciones y relaciona la interpretación de las fracciones y de la suma que intervienen.

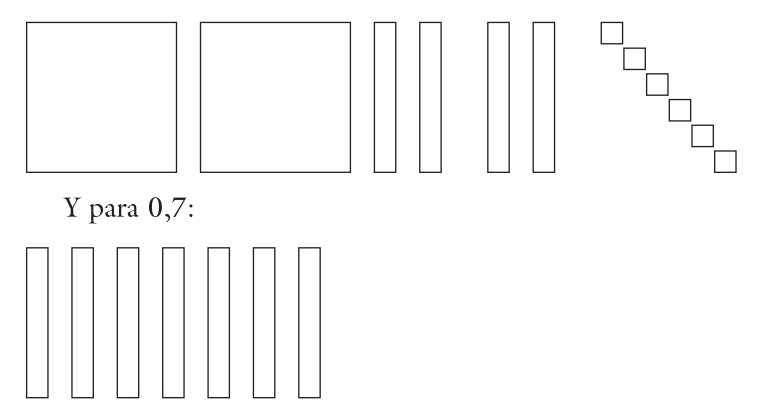
En este contexto la noción de sentido numérico entendido como una forma de pensar sobre los números y la habilidad para operar de manera flexible apoyada en una red conceptual que relaciona los conceptos de unidad, partes congruentes, agrupamiento y valor de posición del sistema de numeración decimal, etc. que implica el desarrollo y la interconexión de las cinco dimensiones en las que hemos caracterizado la competencia matemática (véase Capítulo 1) permite:

– Realizar juicios sobre la racionalidad de los resultados producidos en los problemas numéricos.

– La posibilidad de generar algoritmos no convencionales.

– Relacionar las fracciones y los decimales con las propiedades de las operaciones.

El desarrollo de la competencia matemática puede ayudar a que resuelvan de otra manera la situación descrita en el Capítulo 1 con la división con números decimales (escena 2). En el caso de la suma y resta con decimales, el uso de materiales estructurados puede ayudar a relacionar el manejo de los símbolos con su significado. Representar previamente los números con los bloques multibase (por ejemplo, en la cuenta 2,45 + 0,7) utilizando como unidad la placa, como décima la barra y como centésima la ficha, se obtiene para 2,45:



Y para 0,7:

Confundir las décimas con las centésimas con esta representación resulta más difícil. Este tipo de situaciones permite también reflexionar sobre la relatividad del uso de una determinada representación para cada tipo de unidad (por ejemplo, usando el cubo grande para representar la unidad).

4. Razonamiento proporcional

Una proporción es una igualdad de dos razones. El razonamiento proporcional es el que se desencadena cuando se resuelven situaciones como las siguientes, reflejando, en las explicaciones que se puedan proporcionar, las relaciones estructurales de estas situaciones. Desde esta perspectiva no es una manifestación de razonamiento proporcional el solo uso de la técnica «de la regla de tres» o resolviendo expresiones como $a/b=x/d$ multiplicando en cruz. Las siguientes situaciones reflejan características de relaciones de proporcionalidad y constituyen contextos en las que se pueden manifestar los procesos de razonamiento proporcional.

- *Pedro compró 12 kilos de naranjas por 18 euros. ¿Cuánto hubiera pagado por 9 kilos?*

- *Ana quiere comprarse una camisa que vale 20 euros. Su madre queda con ella que le pagará 2 euros por cada 3 euros que pague Ana. En este caso, ¿cuánto dinero debe sacar Ana de la hucha para comprarse la camisa?*
- *Un ciclista A recorre 25 km en 20 minutos. Otro ciclista B recorre 20 km en 15 minutos. ¿Cuál lleva mayor velocidad?*

En la primera de las situaciones anteriores, los protocolos siguientes muestran rasgos de razonamiento proporcional:

«Si Pedro ha pagado 18 euros por 12 kilos de naranjas, entonces la mitad de kilos valdrán la mitad de dinero. Así, 6 kilos valdrán 9 euros, y también 3 kilos valdrán 4,5 euros.

Luego como 9 kilos son 6 más 3 entonces valdrán 9 euros + 4,5 euros que es 13,5 euros».

«Si 12 kilos de naranja valen 18 euros entonces 1 kilo valdrá 1,5 euros. Luego 9 kilos valdrán 9 × 1,5 que es 13,5 euros».

Las situaciones comparten entre sí una serie de relaciones estructurales que podemos singularizar en:

Kilos naranjas ⟶ precio
12 ↓ 18 ↓
9 ⟶

Muestran dos tipos de relaciones. Una relación funcional que vincula magnitudes diferentes como es precio/kilo, y que refleja el sentido de la unidad de la razón (18/12 es el precio de 1 kilo de naranjas). Por otra parte, existe una relación entre cantidades de la misma magnitud, generando una razón escalar (por ejemplo, 12/9). El razonar usando estas relaciones tanto de manera cualitativa como cuantitativa caracteriza el razonamiento proporcional. El uso de sucesiones numéricas que mantienen las relaciones estructurales de la situación proporcional ayuda a que los alumnos generen rasgos de este tipo de razonamiento.

kilos	3	6	12	6 + 3
euros	4,5	9	18	9+ 4,5

La sucesión de números proporcionales permite explicitar en los procesos de comunicación y de resolución de problemas las dos características de las relaciones estructurales que conforman la situación de proporcionalidad:

– La constancia de las razones escalares.

– La constante de proporcionalidad (o «unidad de razón»).

La generación del razonamiento proporcional es una pieza clave en la transición de los alumnos de Primaria a Secundaria. En cierta medida el razonamiento

proporcional consolida el conocimiento matemático escolar de las fracciones, números decimales y razones de la Educación Primaria y se constituye en piedra angular para los estudios posteriores en matemáticas y ciencias en Secundaria.

De la misma forma que ocurría con las fracciones, los alumnos suelen tener un conocimiento informal sobre las situaciones de proporcionalidad, y también como ocurría con el dominio de las fracciones y los números decimales, la pérdida de significado puede favorecerse si existe una prematura introducción de los símbolos y de las técnicas que se pueden aplicar en las situaciones de proporcionalidad. En el currículo de Primaria, las situaciones de proporcionalidad suelen plantearse en el tercer ciclo (y principalmente en 6°), aunque los alumnos de edades más tempranas pueden generar aproximaciones cualitativas a este tipo de situaciones, centrándose las situaciones de enseñanza en los significados dados «relativamente» (utilizando el término «en relación a»). Teniendo en cuenta estos aspectos es necesario considerar que:

– Los alumnos necesitan desarrollar un «sentido de la noción de razón» entendido como el índice comparativo que proporciona información sobre una situación, y por tanto distinguir las situaciones en las que es posible aplicar este índice comparativo de las situaciones en las que no es posible. Esto implica reconocer que en una situación de proporcionalidad los cambios en una magnitud implican cambios en la otra, pero que el índice comparativo entre cantidades correspondientes es constante.

– Los alumnos deben desarrollar un lenguaje apropiado para pensar sobre, comunicar y explicarse en este tipo de situaciones. El desarrollo del vocabulario apropiado es por tanto un aspecto clave vinculado al desarrollo de la competencia matemática.

Con el análisis de situaciones en las que se den relaciones de proporcionalidad y situaciones en las que no se den estas relaciones, los alumnos pueden desarrollar una intuición desde la que apoyar el «sentido de razón» y dotar de significado a los símbolos utilizados para expresar proporciones.

– Comparaciones absolutas y relativas

Una de las características más importantes del razonamiento proporcional es la habilidad para analizar cambios relativos y absolutos que están vinculados a realizar comparaciones aditivas o multiplicativas. Por ejemplo, analicemos la siguiente situación:

Hace dos semanas la planta A medía 8 cm y la planta B medía 12 cm. En estos momentos la planta A mide 11 cm y la planta B 15 cm. ¿Cuál de las dos plantas ha crecido más?

La respuesta a esta cuestión no es única y depende del tipo de comparación en el que nos fijemos. Si nos fijamos en los «cambios absolutos», es decir nos centramos en la diferencia, la planta A pasó de 8 cm a 11 cm, por lo que creció 3 cm. La planta B paso de 12 cm a 15 cm, por lo que creció 3 cm. Con esta

comparación podemos concluir que las dos plantas crecieron 3 cm y por tanto crecieron lo mismo. Si nos fijamos en los «cambios relativos», debemos fijarnos en los cambios en relación a la altura inicial. La planta A creció 3 cm de los 8 que media al principio, por lo que su crecimiento relativo a su altura inicial es de 3/8 de su altura inicial. La planta B creció 3 cm de los 12 que media al principio, por lo que su crecimiento relativo a su altura inicial es de 3/12 de su altura inicial. Por lo tanto, como 3/8 es mayor que 3/12 la planta A creció más que la planta B. La diferencia en la respuesta está justificada en función de si realizamos una comparación absoluta o relativa. Precisamente la habilidad para pensar en términos relativos está vinculada al desarrollo del razonamiento proporcional. En este sentido, los alumnos de Primaria deben ser capaces de llegar a comprender la diferencia entre estos dos tipos de comparaciones: comparación absoluta cuando nos fijamos en el crecimiento absoluto y comparación relativa cuando se compara el crecimiento a la altura inicial. La noción de razón, como un índice comparativo entre dos cantidades, es la que fundamenta este segundo tipo de aproximación.

– Tablas de sucesiones de números proporcionales como instrumento de aprendizaje

El uso de sucesiones de números que mantienen relaciones de proporcionalidad desde alguna situación concreta puede ser una buena ayuda para construir los contextos donde los alumnos pueden empezar a desarrollar procesos de razonamiento proporcional. Las tablas con sucesiones de números, como las utilizadas al principio de esta sección, deben ser pensadas como instrumentos que faciliten el desarrollo de maneras de pensar ante situaciones de proporcionalidad. Sin embargo, el solo uso de las tablas como instrumento de aprendizaje no asegura por sí mismo el desarrollo del razonamiento proporcional. Por ejemplo, en el primero de los protocolos descritos en esta sección, el alumno está utilizando estrategias aditivas de manera iterativa para buscar la respuesta al problema planteado combinando mitades y dobles. Esta estrategia de construcción de la solución aunque correcta no nos asegura que el alumno esté pensando en relaciones multiplicativas. Como por ejemplo, ¿este alumno se da cuenta que la relación entre el número de kilos y los euros pagados es constante en todas las columnas de la tabla? Este tipo de respuesta genera una cuestión, ¿hasta qué punto esta estrategia utilizada por el alumno puede ser válida cuando las relaciones entre los números implicados cambie y no sea fácil calcular mitades y dobles? El protocolo 2 muestra la respuesta de un alumno que sí parece haber identificado la relación multiplicativa, una relación que es lo suficientemente potente para ser independiente de la magnitud de los números que estén en la situación.

Para el maestro se plantea la cuestión de cómo ayudar a los alumnos a que desarrollen razonamientos de proporcionalidad que puedan llegar a ser independientes de los números utilizados. Una sugerencia es variar el tipo de preguntas que se plantean a los alumnos, y la estructura entre las cantidades y números, para forzar a los alumnos a ir más allá de la zona en la que son efica-

ces procedimientos más primitivos. Desde el punto de vista de la planificación del profesor y del diseño o selección de tareas las variables que habría que considerar pueden ser:

- Problemas en los que ambas cantidades aumenten.
- Problemas en los que ambas cantidades disminuyan.
- Problemas implicando relaciones de proporcionalidad inversa.
- Problemas con números diferentes de los naturales.
- Problemas en los que su proceso de resolución se apoye en multiplicaciones/divisiones y sumas/restas.
- Problemas que no puedan ser resueltos con estrategias de doblar y calcular mitades.

Por ejemplo, con el problema de las naranjas podemos hacer las siguientes modificaciones atendiendo a las sugerencias anteriores:

- *Problema 1. Si 5 kilos de naranjas valen 7 euros. ¿Cuántos kilos puedo comprar con 350 euros?*
- *Problema 2. Si 2,5 kilos de naranjas valen 7 euros. ¿Cuánto valen 9 kilos?*
- *Problema 3. Si 38 kilos de naranjas valen 25 euros. ¿Cuántas naranjas puedo comprar con 17,5 euros?*

Cada una de estas modificaciones puede ayudar a generar nuevas estrategias y perfilar la eficacia de los procedimientos empleados. La construcción de las tablas permite explicitar las estrategias que pueden utilizarse para buscar la solución y por tanto singularizar las relaciones multiplicativas entre las cantidades. Por lo tanto, si el objetivo es generar contextos en los que poder discutir el dominio de eficacia y las limitaciones de las estrategias utilizadas, una discusión previa se centra en el proceso de construcción de las tablas y en la necesidad de reflejar fielmente las relaciones estructurales de la situación. Los diagramas siguientes muestran algunas de las posibles estrategias vinculadas a los problemas anteriores:

Para el problema 1

Kilos	5	500		
euros	7	700	350	

$\times 100$:2

Para el problema 2

$\times 2$:5 $\times 9$

Kilos	2,5	5	1	9
euros	7	14	14/5 = 2,8	

Para el problema 3

Kilos	38	19	7,6	
euros	25	12,5	5	17,5

:2

:5

±

El uso de las tablas como un instrumento de aprendizaje hay que entenderlo como una construcción personal (o de grupo a través de las interacciones entre compañeros) que intenta dar cuenta de los procesos de pensamiento (y por tanto de las características del razonamiento proporcional generado). Aunque el profesor pueda recoger las estrategias planteadas por los alumnos y explicitar los atajos o procedimientos más eficaces, son los propios alumnos los que deben hacerlos suyos en última instancia. En este sentido, la competencia matemática entendida como el desarrollo de las relaciones entre las cinco dimensiones descritas en el Capítulo 1 (comprensión, eficacia en el uso de los procedimientos, pensamiento estratégico, comunicación y actitudes) es ejemplificada en este tipo de situaciones a través del uso de las tablas. Las tablas se consideran entonces como instrumentos de aprendizaje al permitir explicitar las relaciones estructurales entre las cantidades y las estrategias empleadas. Además, las tablas permiten ser usadas como un instrumento que facilita la comunicación y explicación de las estrategias empleadas. Los contextos en los que los alumnos pueden construir los procesos de razonamiento mejorando sus estrategias iniciales, desde la identificación de las relaciones estructurales de los problemas (pensamiento estratégico), pueden permitir de manera adicional crear autoconfianza y por tanto generar actitudes positivas hacia la propia capacidad de resolución de problemas.

5. Actividades

Actividad 7: *Preguntas sobre la Escena 2.*

- ¿Era posible que se le hubiera «olvidado» lo que sabía de fracciones del año pasado?
- ¿Existe alguna «influencia» en representar la unidad como un rectángulo o como un círculo?
- ¿Son las fichas una representación para las fracciones más difícil que el dibujo de figuras geométricas?
- ¿Qué papel desempeñan el tipo de tareas que se proponen en el significado de fracción que tienen los aprendices?
- ¿Las fracciones son algo más que «hacer partes y coger algunas»?
- ¿Es necesario saber hacer estos ejercicios para hacer correctamente las cuentas con fracciones?
- ¿Vale la pena dedicar tiempo a este tipo de tareas y no directamente a enseñarle las operaciones con fracciones?

Actividad 8:

EL CASO DE BEATRIZ. Razón y proporcionalidad en 6° de Primaria

Beatriz es una maestra en una escuela en el extrarradio de una gran ciudad. Ha estado trabajando en esta escuela durante los últimos 10 años. Ella siempre había estado dando clase en el segundo ciclo de Primaria pero hace dos años durante una de las últimas reestructuraciones que hubo en el colegio le ofrecieron pasar al tercer ciclo empezando desde 5° curso. Le pareció una idea interesante porque le permitía cambiar un poco y aceptó. El año pasado dió por primera vez 5° y este año estaba en 6° con los mismos alumnos. Su clase tenía 26 alumnos con niveles bastante diferentes, y algunos más nerviosos de la cuenta, lo que algunas veces le ocasionaba algunos problemas de disciplina pero que había sabido manejar hasta estos momentos.

Beatriz pensaba que el temario de 6° curso no es muy diferente del de 5°, aunque tenía algunas cosas más y se amplían cosas dadas en los cursos anteriores. Uno de los contenidos que aparecían nuevos era la proporcionalidad y los porcentajes. Beatriz pensaba que este tema tenía alguna relación con las fracciones y los decimales y que por tanto no debería encontrarse con muchas dificultades, y que estaba el «algoritmo de la regla de tres» que permitía resolver las situaciones de proporcionalidad. En este sentido, Beatriz identificaba esta parte del temario con la regla de tres, la noción y aplicación de porcentajes y las situaciones de las escalas en planos y mapas y lo consideraba un contenido bastante útil.

Cuando Beatriz empezó a preparar el tema vió que el libro de texto traía problemas de «regla de tres» en la primera parte, pero que previamente introducía las relaciones en situaciones a través de «series de números proporcionales». Una de estas situaciones era la siguiente:

Andrés pagó 1920 pesetas por 12 azulejos iguales, ¿cuánto pagará por 5 azulejos?

Observa cómo resuelve el problema Andrés:

1 azulejo cuesta → 1920 : 12 = 160 ptas.

2 azulejos cuestan → 160 · 2 = 320 ptas.

3 azulejos cuestan → 160 · 3 = 480 ptas.

De esta forma se puede completar la siguiente tabla:

Número de azulejos	1	2	3	4	5
Precio en pesetas	160	320	480	640	800

Andrés pagará 800 pesetas por 5 azulejos.

Observa que en la tabla anterior se puede pasar de los números de la primera fila a los números de la segunda fila multiplicando por 160.

También podemos pasar de los números de la segunda fila a los números de la primera fila dividiendo por 160.

Número de azulejos	1	2	3	4	5
Precio en pesetas	160	320	480	640	800

Número de azulejos	1	2	3	4	5
Precio en pesetas	160	320	480	640	800

Por eso decimos que la serie de números

1, 2, 3, 4, 5, y 160, 320, 480, 640, 800

son dos series de números proporcionales y la tabla se llama tabla de proporcionalidad.

Fuente: Matemáticas 6°. Edt. Santillana; página 134. Evidentemente, este libro de Santillana se editó antes de la aparición del euro (N. del E.).

A continuación aparecían ejercicios que consistían en dada una fila y el número que multiplica o divide obtener la otra fila, y dada una fila y un número de la otra, determinar el número que permite pasar de una a otra multiplicando o dividiendo y rellanar la tabla.

En estos momentos Beatriz no tenia idea de cómo iban a responder los alumnos a este tipo de situación y cómo podría introducir los procedimientos para resolver los problemas de regla de tres que aparecían en el texto a partir de esta introducción. El procedimiento de la regla de tres que ella conocía y que se podía aplicar para resolver la mayoría de los problemas que aparecían en el texto tenía poco que ver, inicialmente, con lo de las series de números proporcionales.

Por otra parte, a Beatriz le gustaba siempre saber lo que los alumnos podían conocer del tema antes de empezar, pero como no tenía experiencia en 6° curso no tenía una idea clara de cómo iban a responder sus alumnos. Por eso, pensó en utilizar la situación que aparecía al principio del tema para recabar información

1) Andrés pagó 1 920 pesetas por 12 azulejos iguales ¿cuánto pagará por 3 azulejos? Ahora completa la siguiente tabla teniendo en cuenta los datos del problema

Número de azulejos	Precio
3	
6	
9	
12	1 920
15	

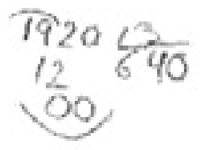
¿Cómo habéis obtenido el precio de 6 azulejos?

¿Y el precio de 3 azulejos?

¿Y el precio de 15 azulejos?

Cuando recogió las respuestas se dio cuenta que había una gran variedad pero que podían agruparse de alguna manera. Algunas de las respuestas obtenidas se incluyen en las páginas 216 a 219.

1) Andrés pagó 1.920 pesetas por 12 azulejos iguales. ¿Cuánto pagará por 3 azulejos?



Ahora completa la siguiente tabla teniendo en cuenta los datos del problema:

Nº Azulejos	Precio
3	640
6	320
9	200
12	1.920
15	5760

*¿Cómo habéis obtenido el precio de los 6 azulejos?

Dividiendo 1920 entre 6

*¿Y el precio de los 3 azulejos?

Dividiendo 1920 entre 3

*¿Y el precio de los 9 azulejos?

Dividiendo 1920 entre 9

*¿Y el precio de los 15 azulejos?

Multiplicando 1920 por 3.

TEST DE IDEAS PREVIAS

1) Andrés pagó 1.920 pesetas por 12 azulejos iguales. ¿Cuánto pagará por 3 azulejos?

1.920 | 12
12   640
(00)

Ahora completa la siguiente tabla teniendo en cuenta los datos del problema:

Nº Azulejos	Precio
3	640
6	320
9	213
12	1.920
15	100

*¿Cómo habeis obtenido el precio de los 6 azulejos? dividiendo

*¿Y el precio de los 3 azulejos? dividiendo

*¿Y el precio de los 15 azulejos? dividiendo

TEST DE IDEAS PREVIAS

1) Andrés pagó 1.920 pesetas por 12 azulejos iguales. ¿Cuánto pagará por 3 azulejos?

Ahora completa la siguiente tabla teniendo en cuenta los datos del problema:

Nº Azulejos	Precio
3	64
6	32
9	213
12	1.920
15	123

¿Cómo has obtenido el precio de los 6 azulejos?

32

¿Y el precio de los 3 azulejos?

64

¿Y el precio de los 9 azulejos?

213

¿Y el precio de los 15 azulejos?

123

TEST DE IDEAS PREVIAS

1) Andrés pagó 1.920 pesetas por 12 azulejos iguales. ¿Cuánto pagará por 3 azulejos?

1920 | 3
 12   640 pts
 00

Ahora completa la siguiente tabla teniendo en cuenta los datos del problema:

Nº Azulejos	Precio
3	640
6	1920
9	2560
12	1.920
15	3200

640 · 640
x 3   x 4
1920 2560
640
x 15
3200

•¿Cómo habeis obtenido el precio de los 6 azulejos?
multiplicando

•¿Y el precio de los 3 azulejos?
multiplicando

•¿Y el precio de los 9 azulejos?
multiplicando

•¿Y el precio de los 15 azulejos?
multiplicando

Cuestiones

A)

– ¿Consideras que fue una buena tarea?

– ¿Crees que la tarea utilizada por Beatriz puede ayudar a describir las concepciones previas de los alumnos sobre las series de números proporcionales y la proporcionalidad?

– ¿Tú habrías utilizado esta tarea u otra?; ¿por qué?; ¿con qué objetivos?

B)

– ¿Qué es lo que parece que entienden los alumnos?

– ¿Por qué crees que han contestado de la forma en que lo han hecho?

– ¿Qué piensas que pueden estar pensando los alumnos?

– Ordena las respuestas de los alumnos según las características del razonamiento proporcional que manifiestan. Justifica tu respuesta.

¿Cuál crees que puede ser el motivo por el cual los niños C y D han contestado de la forma en la que lo han hecho?, ¿cuál puede ser la diferencia en su forma de entender la tarea propuesta?

C)

¿Cómo tendrías en cuenta la información recogida a partir de estas respuestas para planificar la enseñanza de esta lección?

BIBLIOGRAFÍA

CASTRO, E. y TORRALBO, M. (2001): «Fracciones en el currículo de la Educación Primaria» (pp. 285-314). En E. CASTRO (Ed.) *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Síntesis: Madrid.

CASTRO, E. (2001): Números decimales (pp. 315-346) En E. CASTRO (Ed.) *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Síntesis: Madrid.

CENTENO, J. (1988): *Los números decimales. ¿Por qué?, ¿Para qué?* Síntesis: Madrid.

LLINARES, S. y SÁNCHEZ, V. (1988): *Fracciones*. Síntesis: Madrid.

FERNÁNDEZ, F. (2001): «Proporcionalidad entre magnitudes» (pp. 533-558). En E. CASTRO (Ed.) *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Síntesis: Madrid.

CAPÍTULO 8

El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida

ÍNDICE

Mª del Carmen Chamorro

1. Introducción

La medida de magnitudes constituye un bloque de contenidos tradicionalmente tratado tanto en la Enseñanza Primaria como en la Secundaria, ninguna reforma del currículo ha dejado fuera este núcleo temático de gran utilidad en la vida práctica de cualquier ciudadano. Pero es que, además de esta utilidad, si se analiza desde un punto de vista matemático qué conocimientos hay detrás de la medida de magnitudes encontramos conceptos refinados y complejos que han sido incorporados a las matemáticas superiores de manera muy reciente. Nos referimos, evidentemente, a la teoría de la medida de gran importancia en matemáticas.

Sin embargo, es justamente la consideración de que se trata de un conocimiento social (al fin y al cabo casi todos los adultos saben medir o creen que saben medir), lo que genera no pocas paradojas en su enseñanza. Así, la escuela abandona parte de esa enseñanza, por ejemplo la medición efectiva de objetos, en el convencimiento de que el alumno acabará aprendiendo ciertas cosas por su cuenta, en sus experiencias familiares y sociales, lo que luego resulta ser falso. Convierte, por tanto, en objetos didácticamente invisibles[1] saberes y conocimientos que el alumno tendrá después necesidad de utilizar, bien para adquirir nuevos conocimientos, bien para su vida personal.

Tradicionalmente se trata de un tema considerado difícil tanto para los niños como para los maestros.

Los maestros se suelen limitar al trabajo formal de cambio de unidades del Sistema Métrico Decimal, que es presentado de forma algorítmica, pues lo que se trata es de manejar una regla para dominar de manera rápida las equivalencias entre unidades, por lo que no es de extrañar que sea considerado por los profesores como un tema abstracto y ¡poco práctico! Esta práctica está en la mayoría de los casos encaminada a entrenar a los alumnos en la resolución de ejercicios de los manuales escolares, enseñándoles lo que podríamos llamar procedimientos de algoritmización a realizar mecánicamente, y que, por su propia naturaleza, encierran una pérdida del sentido que tienen los cambios de unidades, pero eso sí, crean la ficción de que el alumno aprende, al confundir aprendizaje con la resolución de ejercicios del libro.

Los alumnos se encuentran con grandes dificultades para encontrar sentido a estas actividades, actividades que hay que hacer notar, no se realizan nunca fuera de la escuela. ¿Quién en su vida privada ha necesitado pasar de metros a decímetros, o de kilos a hectogramos? Planteadas así las cosas, no es de extrañar que la trasposición didáctica clásica de la medida se reduzca a un mero saber

[1] Sobre la noción de invisibilidad didáctica, puede consultarse Ruiz Higueras, L.: «La invisibilidad institucional de los objetos matemáticos. Su incidencia en el aprendizaje de los alumnos», en Chamorro, M.C. (ed.).: *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas,* MECD, 2001, Madrid.

escolar, sin prácticamente utilidad alguna fuera de la escuela, y muy distante, epistemológicamente hablando, del saber matemático de referencia.

Otra paradoja presente en la enseñanza de las magnitudes es que, a pesar de tratarse de un saber antiguo que siempre ha estado en el currículo, por lo que debería estar bien estudiado, no hay una relación clara entre las demandas sociales y culturales relativas a la medida, y la transposición didáctica que se hace de la misma en la enseñanza, en la que se evitan las prácticas efectivas de medición, lo que convierte la enseñanza de la medida en un discurso teórico, que como veremos más adelante versa fundamentalmente sobre cuestiones aritméticas más que de medida. Los ciudadanos hacen, en general, una mala utilización de los instrumentos de medida, y encuentran dificultades en los cálculos con medidas, de longitud y dinero fundamentalmente, sin que la escuela haga nada por cambiar este estado de cosas.

El conocimiento de la medida de magnitudes es esencial para que el alumno pueda comprender lo que pasa a su alrededor. La medida es el medio de control por excelencia que va a permitirle interpretar la realidad (relaciones comerciales, lectura de la prensa, etc.) y criticarla a partir de datos (interpretación de presupuestos, tasas de empleo o paro, porcentajes de polución, etc.). Esto hace que la medida se erija en instrumento fundamental en relación con otras áreas del currículo, permitiendo un mejor tratamiento de ejes transversales como por ejemplo, la educación para el consumo.

El reto didáctico va a consistir en encontrar situaciones didácticas que permitan la construcción con significado de los conceptos esenciales de medida, para lo cual habrá que implicar al alumno, al que se debe proporcionar las herramientas necesarias para desenvolverse en su vida como ciudadano.

2. Objetivos

- Conocer las concepciones espontáneas de los alumnos en torno a la medida de magnitudes.
- Analizar los conceptos de medida que deben ser enseñados en la Enseñanza Primaria.
- Pasar revista de manera crítica a la transposición didáctica habitual de la medida de magnitudes.
- Estudiar los fenómenos de enseñanza propios de la enseñanza de la medida y sus consecuencias didácticas.
- Proporcionar pautas para la enseñanza de las magnitudes lineales, en particular la longitud, en la Educación Primaria.

3. La medida y el saber sabio de referencia. Los entornos de la medida

Partiendo de la noción matemática de magnitud[2] [conjunto M de clases de equivalencia en el que se ha definido una suma ⊕ y un orden < que dota al conjunto (M, <, ⊕) de la estructura de monoide conmutativo y arquimediano], y de medida (aplicación que va de M a un conjunto de números positivos, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{R}^+$, que viene determinada por la cantidad u escogida, denominada unidad, y que tiene como imagen el 1), podemos distinguir en la medida de magnitudes varios entornos distintos:

- Objetos soporte.
- La magnitud considerada.
- Las cantidades de magnitud.
- La aplicación medida.
- La medida imagen.
- La medida concreta.
- La medición.
- El orden de magnitud.

Esta distinción de entornos va a servirnos para analizar tanto los disfuncionamientos de la transposición didáctica y los fenómenos de enseñanza asociados, como para diseñar una acción didáctica adecuada que tome en consideración la naturaleza epistemológica de la noción de medida, pues de hecho, cada uno de estos entornos proporciona un medio a-didáctico que posibilita trabajar aspectos distintos, todos ellos constitutivos de las nociones de magnitud y medida.

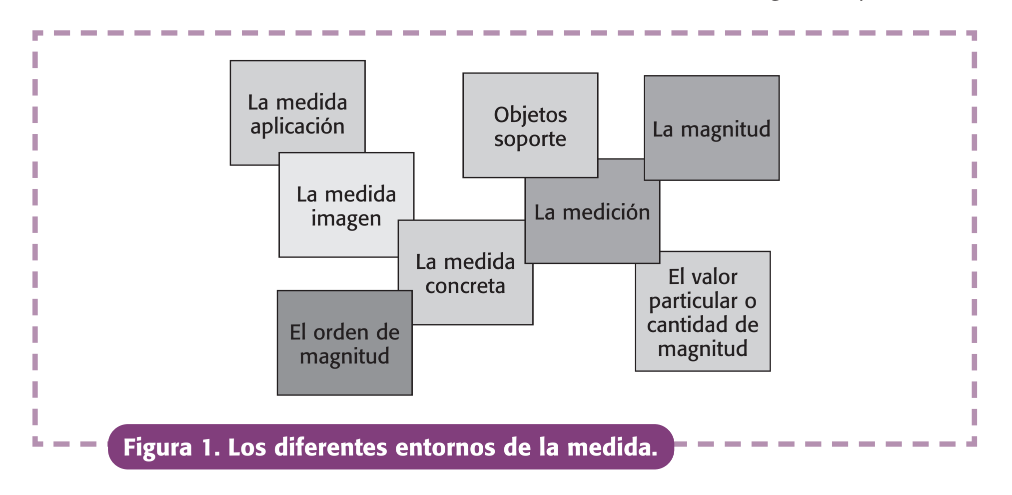


Figura 1. Los diferentes entornos de la medida.

[2] Para más detalle, consultar BELMONTE, J.M. y CHAMORRO, M.C. (1988): *El problema de la medida,* Madrid: Síntesis.

La transposición didáctica de la medida de magnitudes se caracteriza, entre otras cosas, por la existencia de una gran variedad de términos y el uso de un vocabulario flotante que designa de forma indistinta tanto acciones como conceptos de naturaleza matemática y social bien distintas. Lo anterior no es sino un signo externo del deficiente tratamiento que recibe la medida tanto en la Enseñanza Primaria como en la Secundaria, en las que abundan los errores de tipo matemático y se obvian importantes aspectos de la medida de magnitudes, obteniéndose como resultado una transposición didáctica reductora e incompleta, que bajo el pretexto de enseñar aspectos prácticos útiles para la vida corriente, dedica la mayor parte del tiempo al aprendizaje de procesos algoritmizados de escasa utilidad más allá de los ejercicios escolares.

El concepto de magnitud está ausente de los currícula, sin que preocupen los problemas de decantación y apreciación de cada magnitud en particular, y sin que haya un trabajo sistemático sobre los métodos de comparación, lo que es ciertamente complejo en magnitudes como la superficie o el volumen.

Trabajar el entorno relativo a la cantidad de magnitud supone trabajar la relación de equivalencia, es decir la adquisición de criterios que permitan al alumno saber cuándo dos longitudes, dos superficies, dos masas o dos volúmenes son equivalentes en magnitud; es decir, trabajar los problemas de conservación de la magnitud, que si bien son adquiridos muy rápidamente y a edades muy tempranas en el caso de la longitud o la capacidad, son tardíos y lentos en el caso de la superficie (12 a 14 años) o el volumen (13 a 17 años).

El descubrimiento y aplicación de los criterios de equivalencia en una magnitud no son objeto de trabajo específico, por lo que se recurre a la comparación a través de los resultados obtenidos por medición, produciéndose así un deslizamiento epistemológico que sustituye las actividades de medida por meras actividades de tipo numérico.

Reconocer que la cantidad de superficie puede ser la misma en dos figuras de forma muy distinta no es un conocimiento trivial, debe ser construido de una manera laboriosa, y más cuando se sabe que existe un obstáculo epistemológico que hace que los alumnos tiendan a identificar superficie con forma, es decir, creen que el cambio de forma lleva aparejado el cambio de superficie.

En la situación que se describe a continuación, se trata de que los alumnos descubran, justamente, que la superficie no es subsidiaria de la forma o el perímetro.

Material, para cada grupo de cuatro alumnos:

- Regla y tijera disponibles sobre la mesa de la maestra.
- Cuatro figuras poligonales recortadas diferentes, las mismas para todos los grupos, que han sido construidas con las piezas del tangram.
- Si los alumnos piden el tangram, se les dirá que no lo tenemos, que sólo tenemos los triángulos pequeños.

Organización de la clase:

Se trabaja en grupos de 4, todos los grupos son emisores en una primera fase y receptores en una segunda.

Objetivo didáctico:

Se trata de provocar la utilización de un patrón como medio de resolver el problema de la comunicación de la medida del área de una superficie, así como de institucionalizar la escritura del área en función de la unidad.

Descripción de la actividad:

Primera Fase.

La maestra distribuye a cada grupo de 4, después de haber enunciado la consigna, una hoja en la que hay dibujadas cuatro figuras.

Consigna:

1) «Vais a buscar un método para comunicar, mediante un mensaje escrito, sin utilizar el dibujo, la superficie de una figura poligonal cualquiera, a alguien que no la vea.»
2) «Si vuestro método es bueno, el mensaje debe permitir construir una figura poligonal que tenga la misma cantidad de superficie que la que escojáis de las cuatro que hay en la hoja que se os ha repartido.»
3) «Pedidme el material que necesitéis.»

La maestra escribe en la pizarra, a modo de recordatorio: método, mensaje escrito, misma cantidad de superficie...

Para asegurarse de que los niños han comprendido la consigna, la maestra pide a uno que repita lo que hay que hacer.

4) Desarrollo

La maestra pide a cada grupo que se ponga a trabajar, y les dice que vengan a buscarla una vez que el grupo se haya puesto de acuerdo sobre el método de trabajo. En ese momento, comienza para ese grupo la Segunda Fase.

La maestra nombra los grupos A que serán emisores y los grupos B que serán los receptores correspondientes.

Intercambio de mensajes entre los grupos A y B correspondientes. Trabajo de los alumnos.

Después de unos 30 minutos, durante los cuales los alumnos habrán tenido la oportunidad de poner a prueba su método, al menos una vez, la maestra para el trabajo para pasar al debate.

La maestra pregunta a cada par de grupos si han conseguido que funcionen los mensajes o no, y pide que expliquen el procedimiento seguido.

De entre los métodos aparecidos, la maestra debe dejar claro que si bien M_3 (descomposición en polígonos regulares) es válido, y ha sido usado con éxito en otras situaciones de geometría para reproducción de polígonos regulares, es sin embargo muy lento, ya que hay que localizar primero, y describir después, muchas piezas. La conclusión es la misma si el método consiste en localizar y describir las piezas del tangram con que se ha construido la figura.

Los resultados de las sesiones tercera y cuarta, en las que se ha concluido que perímetro y área son magnitudes independientes, deben ser suficientes como para rechazar de forma inmediata métodos como el M_1 que usan el perímetro de la figura.

El método M_2 (dar el perímetro de la figura) debe desacreditarse en virtud de los resultados obtenidos en la sesión anterior, en la que se ha visto que puede haber varios rectángulos isoperimétricos de distinta área.

Si ningún alumno ha propuesto el método M_4 (ver cuántos triángulos pequeños del tangram caben en la figura), la maestra pregunta expresamente: ¿y si tuviéramos una sola pieza para construir la superficie? ¿Cuál podría ser? Se discute entonces las cualidades de dicha pieza: una pieza fácil de colocar, reproducir y describir y que pavimente el plano.

Aportación de informaciones por parte de la maestra:

La maestra institucionaliza el vocabulario e introduce la palabra unidad, así como la manera correcta de escribir el resultado de una medida.

Dos alumnas de 5º de Primaria, Esperanza y Laura, han mandado a Miguel Ángel y Cristina el siguiente mensaje: «Tiene forma de cabeza de zorro. Empezando por arriba a la derecha, y de arriba abajo, el orden de las medidas son: 2,9 cm; 4 cm; 4 cm y 5,7 cm. De abajo a arriba: 4 cm; 3,8 cm y 5,6 cm. De derecha a izquierda 4 cm y 4 cm».

Como se ve, el mensaje muestra el interés que los alumnos tienen en dar cuenta de la forma de la figura, no sólo dicen a qué se parece, sino que intentan, evidentemente sin ningún éxito, indicar la posición de cada uno de los lados. Reproducir una figura equivalente en superficie, es para la mayoría de los alumnos respetar la forma.

Éste es otro mensaje, para la misma figura, enviado por Clara y Borja: «Arriba del todo de esta figura hay dos triángulos que encuadran otro más grande vacío (como las orejas de un gato), las medidas de los triángulos: cada triángulo tiene un ángulo recto que se sitúa en el borde del trapecio que hay debajo. El lado del triángulo que toca el trapecio mide 3 cm. La altura de estos triángulos mide 2,8 cm. El último lado mide 4,2 cm. Debajo hay un trapecio cuya altura mide 5,9 cm. La base mide 9 cm. El lado mide 4,3 cm, y la altura es de 3 cm. Debajo del trapecio hay una especie de barco o barca, cuya altura mide 2,1 cm, la base 4 cm, los lados 4 cm y la altura 2,9 cm.

La mayoría de los mensajes toman en consideración la forma, considerándola como elemento constitutivo de la superficie, hasta el punto de no poder di-

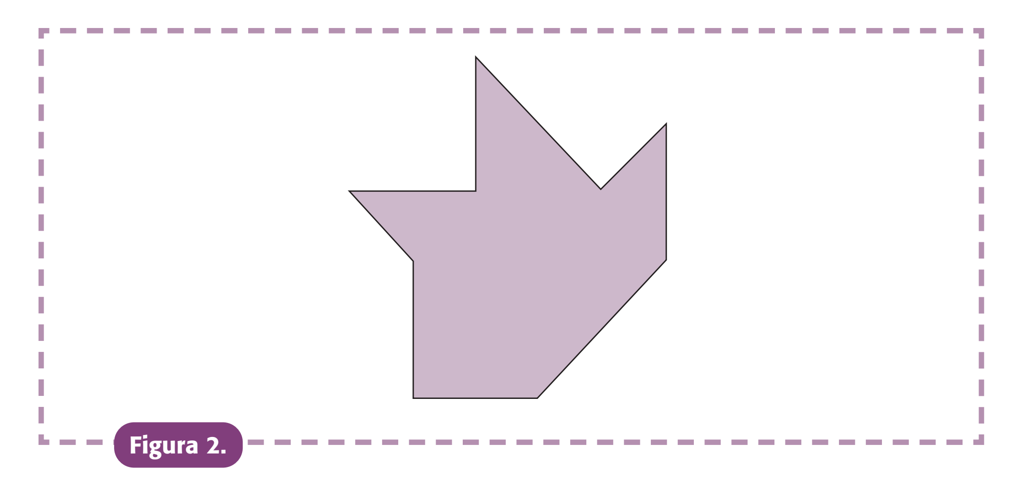


Figura 2.

sociarlas, entendiendo que cualquier mensaje para reproducir una superficie equivalente incluye necesariamente la forma. No se aprecia influencia de la forma particular de cada figura sobre el mensaje a que da lugar, es decir que esta manera de proceder es independiente del aspecto icónico de la figura en cuestión, lo que se acaba de describir pasa con todas las figuras.

Actividad 1: Buscar en manuales escolares ejercicios y actividades de medida. Hacer corresponder cada uno de ellos con el entorno correspondiente. Ordenar después los entornos de mayor a menor número de actividades. ¿Qué puede deducirse?

La medición es casi siempre ficticia y tiene un claro carácter ostensivo[3], que tiene por finalidad sustituir la medición en la realidad de objetos concretos. Por ello las nociones de aproximación, estimación y orden de magnitud no suelen estar contempladas y desarrolladas en los currícula. Hay identificación de entornos en algunos casos, y ausencia de otros que son sistemáticamente ignorados, por lo que las manipulaciones a que se somete el saber sabio de referencia a efectos de ser enseñado producen reducciones y graves modificaciones que pueden calificarse de ilegítimas desde un punto de vista epistemológico.

Así, la medida concreta de los objetos, expresada por un número y una unidad, sirve de soporte a la mayoría de las actividades que se proponen a los alumnos, sustituyéndose las engorrosas prácticas de medición de objetos por operaciones aritméticas elementales o ejercicios de ordenación de números, que suplen las tareas de clasificar y ordenar objetos atendiendo a una magnitud. La mayoría de los problemas que tratan de medida parten en sus enunciados de medidas concretas ya efectuadas, por lo que el trabajo a realizar se reduce a su adición o sustracción, o bien multiplicación o división por un número natural, respondiendo claramente a enunciados típicos de problemas aditivos.

En el caso de las magnitudes pluridimensionales, de las que se hablará en el capítulo siguiente, la correspondencia con los enunciados de producto de medidas[4] es total: conocidas las dimensiones lineales hay que encontrar la superficie o el volumen, o bien, conocidas la superficie o el volumen y la otra u otras dimensiones hay que encontrar la que falta.

Actividad 2: Analizar los problemas de medida de los libros de texto y comprobar la afirmación anterior.

[3] El adjetivo ostensivo proviene del latín *ostendere* que significa presentarse con insistencia, es decir, ostentar. Aquí usamos el adjetivo en el sentido de que el maestro es el que mide, muestra cómo, y de ahí se deduce que ya se ha medido, lo que evidentemente es una metáfora de medición.

[4] Ver la tipología de problemas multiplicativos en el Capítulo 6 de Estructuras multiplicativas.

Hay por tanto una clara sustitución de saberes en la que los verdaderos problemas de medida se sustituyen por problemas aritméticos, los procesos de medición por el uso de fórmulas, y los ejercicios sobre conversiones, que ocupan más de la mitad del tiempo de trabajo dedicado a la medida, son un mero ejercicio de numeración decimal.

Muchos conocimientos de medida de gran uso social habían dejado de enseñarse por considerar que podían aprenderse de forma privada; tal es el caso de los procedimientos de medición, el manejo de instrumentos de medida, el uso y lectura de instrumentos graduados y la estimación de medidas. Sin embargo, los profundos cambios sociales, así como los avances tecnológicos en metrología, han desterrado la mayoría de las prácticas sociales de medición, de manera que los conocimientos que antes podían extraerse del ámbito privado son ahora muy escasos. En la sociedad, los metros láser han desplazado a la cinta métrica, las balanzas digitales a las de platillos, los objetos industriales a los artesanales, y con ello se ha privado a los alumnos de las experiencias necesarias para conceptualizar las nociones de medida, por lo que la escuela debe replantearse de forma urgente retomar a su cargo esos aprendizajes.

Actividad 3:

- Hacer un repertorio de las ocasiones de hacer mediciones que ofrece la vida escolar y social al alumno de Primaria.
- Hacer una lista de situaciones que demanden el uso de alguna medición y que puedan ser usadas en el ámbito escolar.

4. Los obstáculos en medida

A los efectos reductores de la transposición didáctica hay que unir las prácticas habituales, productoras de obstáculos didácticos, que refuerzan a menudo obstáculos epistemológicos constatados y tipificados. Tal es el caso de:

– El uso casi exclusivo, como objetos soporte de las diferentes magnitudes, de objetos idealizados, previamente decantados, provenientes casi siempre del microespacio, dibujados la mayoría de las veces, y matematizados en el caso de la superficie y el volumen (polígonos y poliedros), lo que dificulta el reconocimiento en la realidad y en los objetos cotidianos de la magnitud correspondiente, convirtiendo las mediciones en acciones casi imposibles.

– El constante ejercicio de conversiones de unidades, expresando una medida en unidades sucesivamente distintas y de diferente orden de magnitud, que tiene como efecto la imposibilidad de fijar el orden de magnitud de los objetos más comunes, destruyéndolo en algunos casos, e imposibilitando la consecución de un objetivo importante en medida: la estimación.

– La costumbre habitual de dar las superficies dibujadas y no recortadas constituye un obstáculo didáctico que favorece la identificación perímetro/superficie. Esta representación favorece la identificación de la superficie con el borde, permitiendo la confusión entre el objeto representado y el contenido de la representación. Esta práctica impide, además, la aparición de procedimientos de comparación de superficies, que contribuyen a instalar en los alumnos una concepción geométrica de la superficie.

– El tratamiento estándar del cambio de unidades, que es un problema clave para comprender el concepto de medida, utiliza un procedimiento algorítmico basado en la memorización (escalera, casillas de unidades, etc.), altamente didactificado, y que nada tiene que ver con el problema conceptual del cambio de unidades. El desarrollo de las representaciones que se hace un individuo en torno al cambio de unidades está ligado a la adquisición e interiorización de distintas representaciones del mismo hecho, y que tienen tanto un soporte verbal, como manipulativo, geométrico o aritmético, por lo que la práctica habitual en nada contribuye a tales propósitos.

Por ello:

- La medición real de objetos diversos tomados del entorno cotidiano es una actividad didáctica no sólo conveniente, sino también posible, si bien exige un gran esfuerzo de preparación didáctica por parte del profesor. La medición es la puerta de entrada para abordar cuestiones inherentes a la medida como son el problema del error y la aproximación.
- Para asegurar la comprensión y descubrimiento de las relaciones entre unidades es necesario recurrir a actividades de manipulación, tanto en el marco aritmético como geométrico. En particular, abordar el Sistema Métrico Decimal sin haber tratado previamente el cambio de unidades no convencionales, dificulta, y puede llegar a imposibilitar, la comprensión de las regularidades propias del mismo.

5. La realidad escolar. Las dificultades de alumnos y profesores

A pesar de ser un tema habitual en todos los currícula de matemáticas, las cuestiones metodológicas más complejas en torno a la enseñanza de las magnitudes siguen sin resolverse. Las condiciones materiales en las que se desarrolla el trabajo escolar pueden calificarse de mínimas, los maestros cuentan, como todo material, con reglas y cintas métricas, y si acaso alguna balanza, por lo que las actividades de tipo práctico, y las mediciones en particular, son muy escasas y se realizan con muchos obstáculos materiales y de gestión de la clase.

Las dificultades de los alumnos en este tema siguen siendo las mismas de una generación a otra de estudiantes, lo que unido a lo anterior, configura un panorama en el que los cambios operados en los sucesivos cuestionarios han afectado poco a las cuestiones didácticas de fondo.

- Las prácticas escolares, que son muy homogéneas de unas clases a otras, se centran sobre todo en las actividades de tipo formal, dedicando mucho tiempo a solucionar los problemas derivados de la escritura correcta de una medida y a las conversiones de unidades, en las que, paradójicamente, se siguen concentrado las mayores dificultades de los alumnos. Por el contrario, las actividades de estimación y aproximación de medidas, que serían de gran utilidad en la vida corriente, son las menos frecuentes.
- El aprendizaje del manejo de instrumentos se limita a la cinta métrica y la balanza, sin que ni siquiera haya un trabajo sistemático que permita asegurar que los alumnos comprenden el sentido de la

graduación de estos instrumentos. En relación a la graduación ningún manual escolar se plantea un trabajo específico, de forma que se sobreentiende que su comprensión y lectura forman parte de un aprendizaje social que no está bajo la responsabilidad de la escuela.

- Una característica común a la mayoría de los alumnos de la enseñanza elemental es, en consecuencia, su ignorancia de los métodos usuales de medición, un desconocimiento del funcionamiento de los instrumentos de medida, y por tanto una defectuosa elección de los que deben ser utilizados en una situación de medida concreta. Parece, sin embargo, necesario e inevitable, realizar ciertas prácticas para comprender qué es la medida.
- Incapacidad de los alumnos para distinguir magnitudes diferentes, por ejemplo superficie y perímetro, masa y volumen, etc. En particular, la confusión entre perímetro y superficie, constatada ya por Lunzer[5], es de tal persistencia que puede ser considerada como un obstáculo epistemológico[6] que requiere un tratamiento específico. Así, muchos adultos continúan creyendo que una finca A, que tiene una valla de mayor longitud que otra B, tiene también, en todos los casos, mayor superficie que B.

Y es que cuando el alumno no hace otra cosa que calcular con los resultados de las mediciones, practicar por tanto la aritmética, es muy fácil caer en las trampas de los índices figurales, como en el caso en el que asocia una gran masa a un objeto voluminoso, o una mayor área a una superficie de mayor perímetro; el alumno carece de las experiencias de referencia que pueden ayudar a crear un conflicto, y por tanto una ruptura, entre las imágenes intuitivas y las deducciones lógicas de ciertas propiedades de las que gozan la superficie, la longitud o el volumen.

La incapacidad para distinguir magnitudes diferentes se ha visto propiciada en muchos casos por los Cuestionarios Oficiales que no incluían el concepto de magnitud y los pasos necesarios para su constitución, preocupándose tan sólo por las fórmulas que dan la superficie o el volumen en función de las dimensiones longitudinales del objeto. Este tratamiento ha favorecido la identificación objeto (perteneciente a una clase de objetos soporte de la magnitud en cuestión) / magnitud (cualidad de una clase de objetos que es considerada) / número (que da la medida de esa magnitud en función de una unidad, de ese objeto).

En Primaria y Secundaria la magnitud más tratada es la longitud, seguida del tiempo, la capacidad, la masa, y a mucha distancia, la superficie y el volumen. Los alumnos confunden con frecuencia superficie con volumen, perímetro con superficie, y masa con volumen.

- Las unidades de medida usadas son, casi de forma exclusiva, las del Sistema Métrico Decimal, cuya introducción no suele verse precedida de sistemas de unidades no convencionales. Es sin embargo conveniente, y de gran ayuda, presentar al alumno situaciones que le ayuden a descubrir la utilidad de un sistema de unidades, aunque tal sistema no sea regular o no coincida con el sistema legal en uso. El currículo español así lo recomienda, al citar expresamente entre los procedimientos las mediciones con unidades convencionales y no convencionales.

[5] Vinh Bang y Lunzer, Eric: *Conservations spatiales,* París, PUF, 1965.

[6] Véase en el Capítulo 3 la noción de obstáculo epistemológico.

- El tratamiento de la superficie y el volumen comporta aún más dificultades que el de las magnitudes lineales, ya que, entre otras cosas, las concepciones de tipo perimétrico que poseen los alumnos constituyen un fuerte obstáculo que se manifiesta bajo aspectos diferentes. Los métodos de medida de superficie y volumen están también muy algoritmizados, usándose medios didactificados como la cuadrícula o aritmetizados como las fórmulas obtenidas usando las dimensiones lineales, en tanto que métodos como la equidescomposición o la pavimentación, que toman en consideración la naturaleza del concepto de magnitud, son poco frecuentes.

Actividad 4: Describa lo que se recuerde del trabajo que sobre medida de magnitudes se hacía en la escuela cuando usted era estudiante. Observe después alguna clase actual sobre este tema. Establezca las similitudes y diferencias observadas.

6. Los fenómenos de enseñanza

Entre otros fenómenos, algunos ya mencionados, que los futuros maestros deben conocer están:

- **La sustitución de saberes;** bajo el título de actividades de medición, se esconde un amplio abanico de cuestiones que poco o nada tienen que ver con ella. Si se hace un análisis de los libros de texto, ejercicios y evaluaciones, se pone en evidencia que la medida es una excusa para trabajar actividades de domino aritmético, relativas a la numeración y al uso de los números naturales y decimales, produciéndose el reemplazo de las magnitudes por los números, de la medición por el conteo. Las razones de esta sustitución habría que buscarlas tanto del lado de la epistemología de los profesores como del contrato didáctico.
- **La aritmetización de la medida,** consistente en que el acceso a la medida se hace a través de instrumentos numerizados (balanzas digitales, medida de longitudes usando rayos láser, etc.), puede tener a nuestro juicio consecuencias de distinta índole, todas ellas importantes. Con la aritmetización de la medida se van a remplazar las magnitudes por los números. En una balanza analógica la masa de un objeto se materializa, sea a través de las pesas que equilibran el objeto, en una balanza tipo Roverbal, o por el recorrido de la aguja sobre una escala graduada en las de un solo plato, en ambos casos hay un índice que puede ser apreciado por los sentidos[7].

[7] Nótese que a medida que las balanzas se hacen más sofisticadas, la comparación directa entre dos cantidades de magnitud se hace imposible. En una balanza de dos platos, basta con colocar en cada plato la cantidad correspondiente y observar para dónde se inclina la balanza. En las balanzas de un solo plato la comparación es ya indirecta, a través de un intermediario que es la escala. En el caso de las balanzas digitales el elemento intermediario de la comparación son los números.

En una balanza digital no puede encontrarse ninguna referencia a la idea de masa, los dos platillos, la graduación e incluso la aguja han desaparecido. Es el orden de los números el que nos da el orden sobre los objetos.

- **La dialéctica medida aproximada / medida exacta no se presenta** en ningún momento en la concepción que los alumnos tienen de la medida. La medida es presentada como algo más o menos exacto sin que la precisión juegue un papel importante. El problema de la precisión debe ser tenido en cuenta porque es esencial para aprendizajes posteriores de tipo tecnológico-científicos, además es imposible pensar en una buena conceptualización de la idea de medida que no tenga en cuenta la aproximación.

- El papel y la categoría de **los errores no son examinados.** La distinción entre los errores relativos a la medición (error absoluto, error relativo), que siempre existen, los errores de cálculo y los errores de redondeo no se hace en la escuela. El sentido de los errores, el análisis de la mayoración y minoración de los mismos no se produce. Hay también en la actividad escolar una cierta confusión entre aproximación y error.

- La existencia de una **transposición didáctica reductora y desequilibrada** que sólo toma en cuenta ciertos planos de los que intervienen en el concepto de medida. Así por ejemplo, hay un estatuto inexistente del orden de magnitud, es decir, el 8º entorno no es tomado en cuenta y rara vez es trabajado de forma sistemática.

CAPÍTULO 8

Los ejercicios de conversiones de escrituras, concebidos como ejercicios de numeración, como trabajo formal sobre la numeración[8], destruyen la estimación del orden de magnitud en tanto que medio de control de las mediciones. Aunque matemáticamente las siguientes escrituras sean equivalentes: 3,42 m, 32,4 dm, 324 cm, 3 240 mm a efectos de controlar el orden de magnitud, no suponen lo mismo. Para un alumno que *controle* las medidas del microespacio en cm, las expresiones 32,4 dm o 3 240 mm no le ayudan en su control, no son equivalentes desde el punto de vista de la evaluación. Así, los continuos cambios de unidades no permiten al alumno estabilizar el orden de magnitud de los objetos.

Si se quiere que el alumno utilice sistemáticamente la estimación, debe estar previamente familiarizado con el orden de magnitud, entendido en tanto que tamaño habitual de un objeto, de los objetos de su entorno en primer lugar. Posteriormente debe adquirir como referencia la longitud de distancias domésticas, urbanas, geográficas y astronómicas. Lo anterior debe ser conseguido a lo largo de toda la Enseñanza Obligatoria y requiere de la ejercitación sistemática y no esporádica.

[8] En la numeración, las conversiones consisten en el paso de decenas a unidades, de centenas a decenas, etc.; en el SMD el equivalente consiste en pasar de decímetros a metros, de hectómetros a decámetros, etc.

- La **evacuación del currículo de ciertos contenidos** que quedan bajo la exclusiva responsabilidad del alumno que debe hacer uso de sus conocimientos privados: criterios de ordenación y clasificación atendiendo a una magnitud, construcción y sentido de la graduación, técnicas de medición de superficies y volúmenes, etc.
- El tratamiento monográfico, como **medidas producto,** de las magnitudes pluridimensionales, aspecto sobre el que volveremos en el capítulo siguiente.

7. Reflexiones didácticas y epistemológicas en torno a la noción de unidad

Teóricamente, fijar la aplicación medida supone fijar la unidad. Desde un punto de vista didáctico, concienciar a los alumnos de la importancia y necesidad de fijar la unidad es un aspecto clave y de gran importancia, que requiere un tratamiento privilegiado, mediante el diseño de situaciones didácticas específicas que permitan descubrir a los alumnos el papel que juega la unidad en el establecimiento de la medida de magnitudes.

Entre los errores más frecuentes que cometen los alumnos en el ámbito de la medida está precisamente el olvido, a la hora de expresar el resultado de una medición, de la o las unidades; es decir, de aquello que es básico para la determinación de la aplicación medida. Subsanar este tipo de errores pasa por asegurar en los alumnos la idea de que el cambio de unidad tiene como resultado el cambio de lo que llamamos medida de una cantidad de magnitud, y que viene a ser algo así como el teorema fundamental de la medida a nivel elemental, por lo que requiere del diseño de situaciones fundamentales capaces de caracterizar los conocimientos matemáticos específicos subyacentes.

El descubrimiento de que existe un código específico que permite expresar, sea la longitud de una banda o el área de una superficie, no es nada banal. Muy al contrario, los alumnos tienden a utilizar de manera espontánea descripciones que incluyen la forma, el color, la disposición espacial o propiedades geométricas del objeto que carecen de interés y utilidad para dar información sobre la cantidad de magnitud en cuestión, y sólo con un trabajo específico previamente diseñado en forma de situación fundamental, que comprenda:

- Fase de acción: determinación experimental de la longitud, la superficie, la masa, etc.
- Fase de comunicación: búsqueda de un mensaje para comunicar una medida.
- Fase de validación: el mensaje emitido permite o no la fabricación de un objeto equivalente al inicial en longitud, superficie, masa, etc., a los receptores. Es posible el descubrimiento del papel e importancia que juega la unidad en la determinación y comunicación de informaciones concernientes a la medida.

Otro aspecto bien distinto del anterior, pero no menos importante, es el relativo al reconocimiento de las cualidades que deben guiar la elección de la unidad, destacando entre éstas el carácter de universalidad, cualidad que en un primer momento no aparece como evidente para los alumnos de la enseñanza elemental.

Desde un punto de vista histórico, sabemos que hasta finales del Siglo XVIII no se produce la unificación de las unidades de medida, y ello gracias al Sistema Métrico Decimal, dejando atrás estadios más primitivos en los que las unidades están adaptadas a condiciones de existencia y usos comunes, ligadas pues a usos locales, y tienen a menudo carácter antropométrico. La idea de universalizar las unidades de medida comienza a tomar cuerpo a fines del siglo XVII, considerándose a Gabriel Mouton, matemático, astrónomo y clérigo, promotor de tal idea. Tras no pocos avatares, el 18 germinal del año III (7/4/1795), se instaura en Francia el Sistema Métrico Decimal, fijándose para *las medidas republicanas* las nomenclaturas siguientes:

- Longitud: metro (del griego *μέτρον*, medida).
- Superficie agraria: área (del latín *area*, superficie).
- Capacidad, volumen: litro (del griego *λιτρα*, nombre que tenía en la Antigüedad una especie de medida para líquidos).
- Masa: gramo (del griego *γράμμα*, nombre del peso que los romanos llamaban *scrupulum*).[9]

Conforme a las disposiciones de la ley que fijan las unidades antes citadas, se construyen los patrones correspondientes y se materializan las unidades. La ejecución de tan vasto proyecto de unificación hace exclamar a Lavoisier: *«Nada tan grande y tan simple a la vez, ni tan coherente en todas sus partes, ha salido nunca de la mano del hombre».*

Esta reseña histórica, aunque breve, nos sirve para fundamentar varias reflexiones de naturaleza didáctica.

En primer lugar, el largo tiempo transcurrido hasta el establecimiento de un sistema de medida universal señala una gran coincidencia entre la filogénesis y la ontogénesis en distintos aspectos. Hay que señalar la fuerte resistencia, que durante mucho tiempo tienen los alumnos, a utilizar las unidades convencionales, en beneficio del uso como patrones, de objetos que proceden de su entorno y que, aunque más imprecisos, les resultan más próximos afectivamente. El rechazo de tales usos sólo puede provocarse a partir de actividades en las que éstos se manifiesten, claramente, como inadecuados y ligados a estrategias inapropiadas que los hacen fracasar en una tarea concreta; cualquier otro procedimiento, tal como la imposición o introducción gratuita e injustificada, estará basada más en factores sociales que lógico-matemáticos.

[9] MOREAU, H.: *Le système métrique,* París, Chiron, 1975, p. 32.

Por razones similares se justifica de alguna forma un tratamiento didáctico en el que el Sistema Métrico Decimal no sea abordado hasta después de haber trabajado ampliamente con unidades antropométricas primero, y patrones arbitrarios después; pues si la elaboración de la idea de sistema de medida no es ni simple ni fácil para los alumnos de Primaria, conceptualizar un sistema perfectamente concebido como el Sistema Métrico Decimal es poco menos que imposible sin un trabajo previo que permita comprender los procesos de medición y la idea de unidad.

En otro orden de cosas, al igual que los patrones de medida fueron construidos para ser manipulados, el trabajo con las unidades, al menos con aquellas cuyo tamaño lo permite, requiere de la manipulación para familiarizarse con el orden de magnitud, requisito previo para cualquier estimación en medida, y única vía para acceder al descubrimiento y estructuración posterior de la relación entre los distintos órdenes de unidades.

Actividad 5: Describir las condiciones que debe cumplir un objeto para que pueda ser usado como unidad de medida de longitud o de capacidad respectivamente.

8. La medida imagen. El espejismo de la medida exacta

En la enseñanza elemental el número-medida se reduce, en general, a los números enteros, fraccionarios o decimales, obtenidos a través del fraccionamiento de la unidad[10], evitando en todo momento la aparición o utilización de los números reales, lo que obliga, en muchos casos, a admitir el espejismo de la medida exacta de un objeto a nivel experimental, sin entrar de lleno en el debate de la precisión y la aproximación. Se escoge generalmente un valor central del intervalo en el que se mueven los distintos resultados obtenidos, o bien la moda, sin dar a los alumnos ni los medios ni la oportunidad para juzgar sobre el error cometido, su origen y su importancia.

El método de conmensuración[11], que permitiría eliminar alguno de los problemas citados más arriba, apenas si es utilizado en la escuela, y es percibido

[10] El método consiste en dividir una unidad **u** en partes iguales, una de las cuales, **u'**, hará las veces de nueva unidad, para a continuación pasar a contar el número total de estas nuevas unidades, que en conjunto tendrán la misma magnitud que el objeto en cuestión. Si esto no es posible, se procede a dividir de nuevo la unidad **u'** según el mismo procedimiento, y así sucesivamente hasta obtener como medida una fracción.

[11] El método, utilizado ya por los griegos, está en la base de los intercambios comerciales primitivos (5 ovejas se cambian por una vaca, 2 sacos de trigo por 3 de maíz, etc.) y puede expresarse mediante una igualdad como la siguiente:

$$\mathbf{p} \times \mu_U(\mathbf{A}) = \mathbf{n} \times \mu_U(\mathbf{U})$$

que no significa otra cosa que: **p** objetos **A** miden lo mismo que **n** objetos **U**.

erróneamente por los profesores como menos preciso. La ventaja de su utilización es que, si bien ambas estrategias son modelos de acción, la conmensuración es susceptible de ser una estrategia de base para el aprendizaje del fraccionamiento de la unidad, mientras que el proceso inverso en el orden de aprendizaje supondría la aparición de obstáculos de diversa índole.

En todo caso, lo que caracteriza a la medida imagen en el contexto escolar es la tendencia generalizada a proporcionar un número como resultado de una medida, sin mención expresa de la unidad, lo que es tanto como decir que se da la imagen mediante una aplicación, sin que se diga cuál es ésta.

Igualmente hay un rechazo generalizado, tanto en la vida real, como en el comercio o la escuela, al uso de encuadramientos en aquellos casos en los que es imposible dar una medida entera. El encuadramiento, en lugar de disminuir la incertidumbre del resultado obtenido, es percibido por los alumnos como una imprecisión, que es rápidamente evacuada con la aparición y uso de los decimales, de forma que su utilización se restringe al uso científico. Incluso cuando los alumnos de la enseñanza elemental desconocen aún la existencia de los números decimales, encuentran una forma muy particular de expresar una medida no entera, con la ilusión de darla como entera: la expresión *«y medio»* expresa una fracción indeterminada y universal de la unidad. Así, en las sesiones que hemos llevado a cabo sobre la longitud con los alumnos de 8 años, una longitud comprendida entre 3 y 4 cm es designada a menudo, en tanto que los alumnos desconocen el valor y existencia del milímetro, por 3 cm y medio, de forma que el medio representa una cantidad que no es fija y que sirve para expresar la imposibilidad de dar como medida un número entero. Expresiones del estilo 5 cm y 1 mm tienen también a menudo un significado distinto entre los niños, del que un adulto le daría: «5 cm y un poquito».

En nuestra opinión, si se desea introducir el uso de los encuadramientos en la escuela, lo que tiene gran interés en relación con la naturaleza del trabajo científico experimental y de la medida en particular, debería hacerse en relación con tareas que demanden una estimación y no un resultado preciso en una medición, pues en la estimación tiene pleno sentido refinar sucesivamente los intervalos en los que va a encontrarse la medida del objeto estimado, instalando en los alumnos la idea de que *la justa medida* sólo puede ser proporcionada por la anticipación de un cálculo, mientras que en la práctica sólo puede aspirarse a aproximaciones cada vez mejores, es decir, refinando el intervalo de estimación.

Nosotros hemos trabajado con medidas enteras, y ello porque los alumnos no disponen de otro sistema numérico que el de los números naturales, limitándonos a un trabajo de sensibilización, realizado sobre todo con motivo de las mediciones efectivas que los alumnos van a hacer en distintos momentos de la ingeniería que propondremos.

Actividad 6: Inventariar prácticas sociales en las que predomina el espejismo de la medida exacta/entera.

9. El tratamiento de la longitud en la Educación Primaria

Si bien a la longitud se le dedica más tiempo que al resto de las magnitudes, el tratamiento que de ella se hace está completamente didactificado. Su consideración implícita como objeto de enseñanza transparente hace que las actividades propuestas rara vez se propongan el descubrimiento o construcción por parte del alumno de conceptos o propiedades. Los ejercicios están fuertemente institucionalizados y muy desequilibrados en relación con los distintos aspectos de la medida.

9.1. Los dos modelos de medida de la longitud

Bessot y Eberhard[12] hacen un estudio teórico que conduce a determinar los modelos correspondientes a las dos concepciones de designación de una longitud: la medida con una unidad o patrón y la localización sobre una escala.

La tabla que sigue, debida a las autoras antes citadas, presenta un compendio del tipo de situaciones en relación con el instrumento usado y el modelo de longitud que pone en funcionamiento en los alumnos. La progresión de actividades que propondremos, si bien no agota la totalidad de posibilidades, hace un tratamiento bastante extenso de la mayoría.

Como se ve, una longitud puede quedar determinada de dos maneras:

- Utilizando un patrón o unidad u. En este caso, basta con transportar dicho patrón sobre la longitud en cuestión y ver cuántos patrones hay que poner para cubrir por completo la longitud del objeto. En el caso más general, la longitud del objeto a, designada por m(a), no será un número entero de patrones, por lo que se obtendrá un encuadramiento del tipo: $n \cdot u < m(a) < (n+1) \cdot u$
- Utilizar una escala, escala que normalmente está graduada de forma regular, numerada y que tiene fijado un origen, si bien como se ve en la tabla existen otras posibilidades. En este caso, basta con colocar la longitud haciendo coincidir un extremo de la misma con el origen de la escala y leer el número de la graduación que coincide con el otro extremo de la longitud. Éste es el procedimiento habitual de medida de una longitud sirviéndose de un instrumento graduado (caso 5c), una cinta métrica, una regla, etc.

Actividad 7: Buscar situaciones o instrumentos en los que se usen escalas de los tipos que aparecen en la tabla.

Actividad 8: Examinar, en particular, las propiedades de la graduación de una regla.

[12] Bessot, A. y Eberhard, M.: «Une approche didactique des problèmes de la mesure», en *Recherches en Didactique des Matématiques*, vol. 4.3., págs. 293-324, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1983.

9.2. Una propuesta de ingeniería didáctica para la enseñanza de la longitud

Creemos que la propuesta de ingeniería didáctica[13] que hacemos es una aportación a la construcción de un proceso que coordine los dos modelos, y que puede dar lugar a una concepción de la medida de longitudes más equilibrada. La enseñanza habitual trabaja en general el primer modelo, y da por evidente el segundo, limitándose a usar instrumentos graduados, fundamentalmente la regla, sin que haya ningún trabajo expreso sobre el significado y la graduación de los instrumentos, por lo que no se establece relación alguna entre los dos modelos.

La ingeniería sobre la longitud tiene cinco partes, que buscan una transposición didáctica equilibrada que trabaje diferentes entornos. Todas las situaciones han sido construidas buscando que el alumno se implique y descubra los conceptos subyacentes de manera a-didáctica:

Primera parte: el entorno de la aplicación medida.

– Descubrimiento y utilización de un patrón[14] (1 sesión).

– Uso de un sistema de medidas (1 sesión).

Descubierta en la situación anterior la necesidad de usar un patrón para comunicar la longitud de una banda, se proporciona a los alumnos un sistema de patrones (tres bandas de longitudes diferentes) para expresar con su ayuda la longitud de una banda. Esta situación, que funciona en la primera parte como situación de acción, y después de formulación, permite introducir la noción de escritura equivalente, pues la longitud de una banda va a poder ser expresada de diferentes formas. La noción de equivalencia va a ser fundamental para dar sentido al problema de las conversiones, que van a aparecer en la situación siguiente como el paso de una escritura a otra equivalente. Dos expresiones son equivalentes si permiten construir una banda de la misma longitud.

Segunda parte: las unidades y la medida imagen.

– Conversión de unidades. Expresión canónica de la medida (1 sesión).

Los alumnos van a determinar si varias escrituras son o no equivalentes y van a buscar escrituras equivalentes a una dada. Esta actividad se produce en dos tiempos; primero ayudándose de los patrones, para posteriormente circunscribirse al razonamiento numérico a través de las equivalencias encontradas entre los patrones. La situación está construida como situación de validación.

[13] Esta ingeniería ha sido llevada a la práctica en 3º de Primaria, durante los cursos 2000-2001 y 2001-2002 en el C.P. Pablo Picasso de Fuenlabrada con excelentes resultados los dos años. La falta de espacio nos impide reproducir aquí todas las situaciones en detalle, la descripción completa puede encontrarse en CHAMORRO, M.C. *et al.*: «La observación de ingenierías didácticas como método de mejora en la enseñanza de la didáctica de las matemáticas», Proyecto de Innovación Educativa, Vicerrectorado de Estudios de la UCM, 2001.

[14] Esta situación ha sido descrita en el Capítulo 3.

Tipo de útil Elección origen	u manipulable disponible. Sin escala 1	Escala regular no codificada 2	Escala irregular codificada (numérica o no) 3	Escala regular codificada no numérica 4	Escala regular graduada 5		
						Origen fijo	
Modelo					Sin origen 5a	Codificado $k \neq 0$ 5b	Codificado 0 5c
Medida	$m_u(a)$ = número obtenido por conteo de los transportes de u	$m_u(a)$ = número obtenido por conteo de los objetos marcados yuxtapuestos de longitud u		$m_u(a)$ = número obtenido por conteo de los objetos marcados yuxtapuestos de longitud n	$m_u(a)$ = número obtenido por conteo de los objetos marcados yuxtapuestos de longitud n	$m_u(a)$ = número obtenido por conteo de los objetos marcados yuxtapuestos de longitud n	$m_u(a)$ = número obtenido por conteo de los objetos marcados yuxtapuestos de longitud n
Coordinación medida / localización					$m_u(a) = \| i- j \|$	$m_u(a) = r(a) - k$	$m_u(a) = r(a)$
Localización			designación de A por un par de puntos codificados, *no hay unicidad*	designación de A por un par de puntos codificados, *no hay unicidad*	designación de A por un par de números (i, j) *no hay unicidad*	designación de A por el número r(A) > k *unicidad*	designación de A por el número r(A) *unicidad*

Se va a imponer después la escritura canónica como la que usa el menor número de bandas, pasando, a partir de ese momento, a dar siempre la longitud de esta forma.

– Las unidades legales (2 sesiones).

Se presenta el centímetro como unidad legal de medida de longitud, viendo las ventajas que ofrece en la comunicación. Los alumnos van a buscar, también, la relación existente entre el centímetro y el decímetro.

Tercera parte: la medición.

– Medida con el doble decímetro (2 sesiones).

Aunque teóricamente los alumnos saben medir con la regla, se trata de hacerles entrar en la comprensión de la graduación que llevan todas las reglas, la posición que debe ocupar del origen, la colocación del objeto a medir, y en general pasar revista a los múltiples factores que intervienen en la precisión de la medida. Aparece ya el problema del error, tratando de determinar cuál es su origen y si puede ser minorado. En vez de medir objetos dibujados, como habitualmente se hace, se miden objetos corrientes de la clase, buscando formas y tamaños distintos. Hay después un debate sobre las medidas encontradas, buscando errores y procedimientos incorrectos de uso de la regla.

Cuarta parte: la graduación y los instrumentos de medida.

– Construcción del metro[15] (1 sesión).

– Medida con el metro. Discusión sobre las medidas encontradas (2 sesiones).

Se repiten ahora las actividades de medición pero usando una unidad mayor que permite medir objetos reales que se encuentran fuera de la hoja de papel.

– Graduación del metro (2 sesiones).

Hemos tratado de hacer una enseñanza expresa de la graduación, didácticamente invisible en la enseñanza habitual, convencidos de su utilidad e importancia. En la primera de las dos sesiones, los alumnos deben medir con el metro en blanco construido en una sesión anterior, y el medio se estructura de modo que el alumno debe recurrir forzosamente a graduar su metro. Las graduaciones producidas presentan problemas de distinta índole, tales como:

– Problemas de origen (dejan un espacio entre el borde y el 0, igual que en los metros del comercio, cuando la banda a graduar mide justamente 1 metro de borde a borde).

– Graduación con separaciones desiguales (se reproduce la graduación en tanto que dibujo, su parte externa, icónica, sin tomar en consideración la regularidad entre marcas).

[15] La descripción de esta situación puede encontrarse en CHAMORRO, M.C.: «Aproximación a la medida de magnitudes en la Enseñanza Primaria», en *UNO* nº 3, Ed. Grao, Barcelona, 1995.

– Graduación sin numerar (sólo rayas, sin ningún número enfrente).

– Graduación numerada en orden inverso (se sitúa el 0 en el lado izquierdo del metro, de manera que el 100 queda en el borde derecho).

– Graduaciones recurrentes (de varios tipos: 0-10-10-10..., 0-20-20-20...).

La segunda situación, en la que se intercambian los metros graduados por los alumnos, pretende un debate en el que las características de una buena graduación aparezcan de una manera significativa, y no como reglas memorizadas. Parte de la sesión se dedica a elaborar, a partir de las observaciones de los alumnos, un decálogo de construcción de una graduación.

Quinta parte: el control de las actividades de medida.

– Uso de instrumentos de medida (1 sesión).

Se trata aquí de usar distintos metros comerciales: metro de carpintero, cinta métrica, decámetro, etc., para apreciar lo que tienen en común y lo que hay de particular en su manejo.

Si hacemos un paralelismo con el trabajo de Bessot y Eberhard, podríamos considerar que las dos primeras partes corresponden claramente al modelo de designación de la longitud mediante números medida, la tercera parte hace de transición entre los dos modelos, y la parte cuarta se centra claramente en el modelo de localización y uso de números referencia. Son en total 13 sesiones, en torno a los 45 minutos cada una, distribuidas en dos cursos, que no son demasiadas, si se considera que además de una aproximación a los dos modelos citados, abordan el problema de la medición efectiva y el manejo de instrumentos de medida habituales.

La gestión más costosa de la clase se corresponde con los debates y puestas en común después de la realización de mediciones efectivas, sobre todo por la imposibilidad de contar con medios matemáticos para abordar y resolver el tema de la aproximación y el error. Consideramos que el resto de las sesiones es fácilmente reproducible por cualquier maestro, y que la mayor dificultad reside en la preparación previa de los materiales (bandas de cartulina de colores y longitudes diferentes), que si bien son simples, requieren de un gran trabajo material de recortado que necesita precisión y lleva tiempo.

BIBLIOGRAFÍA

CHAMORRO, M.C. y BELMONTE, J.M. (1991): *El problema de la medida*, Ed. Síntesis: Madrid.

CHAMORRO, M.C. (1994): El aprendizaje significativo en matemáticas, Alhambra-Longman: Madrid.

CHAMORRO, M.C. (1995): «Aproximación a la medida de magnitudes en la Enseñanza Primaria», en *UNO* nº 3, Ed. Grao: Barcelona.

CHAMORRO, M.C. (1996): «El currículo de medida y las capacidades de los escolares en Educación Primaria y E.S.O.», en *UNO* nº 10, Ed. Grao: Barcelona.

CHAMORRO, M.C. (2001): «Las dificultades de enseñanza-aprendizaje de las magnitudes en Educación Primaria y E.S.O.», en CHAMORRO, M.C. (ed): *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas,* MECD: Madrid.

CHAMORRO, M.C. *et al.* (2001): «La observación de ingenierías didácticas como método de mejora en la enseñanza de la didáctica de las matemáticas», Proyecto de Innovación Educativa, Vicerrectorado de Estudios de la UCM.

CAPÍTULO 9

Las magnitudes multilineales: la superficie y el volumen

ÍNDICE

Mª del Carmen Chamorro

1. Introducción

A los problemas didácticos generales, presentados en el capítulo anterior, del tratamiento de las magnitudes en la Educación Primaria, hay que añadir ahora los problemas específicos de las magnitudes bidimensionales como la superficie, y tridimensionales como el volumen.

Vergnaud, en su Teoría de los Campos Conceptuales[1], agrupa en un mismo campo conceptual las magnitudes espaciales, longitud, superficie y volumen, argumentando que su tratamiento requiere, en los tres casos, conceptualizaciones tanto de orden geométrico como de las estructuras aditivas y las estructuras multiplicativas, lo que no ocurre en el resto de las magnitudes. Y son justamente el aspecto geométrico y el carácter multilineal los que están en el origen de muchos de los obstáculos y conflictos que el alumno encuentra constantemente cuando se enfrenta al aprendizaje de estas magnitudes.

Las magnitudes superficie y volumen pueden ser tratadas de dos formas:

– Como unidimensionales. En este caso, la aplicación medida μ, que hace corresponder a una cantidad de magnitud un número real positivo, es una medida producto de tipo directo, ello significa que a efectos de medida, una longitud se compara con una longitud patrón, una superficie con una superficie patrón, una masa con una masa patrón, etc., obteniéndose la medida mediante un *proceso aditivo* que incluye el conteo del número de veces que se ha utilizado el patrón con el que hemos comparado. En este caso, tal y como hemos visto en el capítulo anterior, usamos una superficie como unidad para pavimentar una superficie, un volumen para rellenar otro volumen.

– Como producto de medidas; en este caso, para encontrar la superficie, de por ejemplo un rectángulo, *multiplicamos* la medida de sus lados (de ahí el nombre de producto de dos medidas y por tanto bidimensional), para hallar el volumen de un paralelepípedo multiplicamos las medidas de sus tres dimensiones (de ahí el nombre de tridimensional).

Como se ve, cuando se trata la magnitud como medida producto, se hace uso de las estructuras aditivas, mientras que en el caso de considerarse el producto de medidas, se requiere de las estructuras multiplicativas que son más complejas que las aditivas, lo que ya nos daría una justificación epistemológica de la mayor complejidad didáctica de las magnitudes multilineales frente a las lineales.

Si tomamos en consideración los aspectos genéticos, las experiencias, ya comentadas, de Vinh-Bang sobre la conservación de la superficie, nos muestran claramente las dificultades que tienen los niños para coordinar las compensaciones aditivas (aumento o disminución aditiva de las longitudes de los lados) y las

[1] Véase el Capítulo 2.

compensaciones multiplicativas (duplicar por ejemplo el largo y reducir a la mitad el ancho). Así mismo, las experiencias sobre el producto cartesiano muestran que el establecimiento de relaciones independientes entre los factores no implica de forma inmediata una relación multiplicativa.

Todo profesor sabe que, incluso en edades muy avanzadas, que caen de lleno en la etapa de las operaciones formales, los alumnos tienen graves problemas y cometen numerosos y típicos errores cuando se les presenta, por ejemplo, un problema en el que la escala de un mapa o croquis viene expresada en relación a la unidad de longitud, y deben encontrar el área de una superficie. Las relaciones multiplicativas no son convenientemente coordinadas, y la coordinación entre la linealidad de cada una de las dimensiones y la linealidad de la superficie no se establece; el resultado es que la escala aplicada para la superficie es la misma que la de la longitud.

Si el tratamiento de estas magnitudes presenta tantos problemas cuando se trabajan como multilineales, ¿por qué se hace?, ¿qué necesidad hay de ello? La razón es bien sencilla, el tratamiento como magnitudes unidimensionales supone la comparación directa de dos cantidades de magnitud homogéneas, por ejemplo una superficie con una baldosa (la forma de ésta no importa) para ver cuántas baldosas caben en la superficie y así determinar el área en función de esa unidad.

Pero hacemos notar que no todas las magnitudes se prestan con igual facilidad a una medida directa, ya que ésta sólo es sencilla cuando se dispone de un sistema de medidas que la hace posible, como en el caso de la masa y la capacidad, donde indiscutiblemente la medida directa es más sencilla que la de la superficie o el volumen, de ahí que en estos casos no sea interesante plantearse la posibilidad de recurrir a medios indirectos. Son justamente los factores geométricos los que dificultan la medición directa en el caso de la superficie y el volumen, porque la forma es aquí determinante para facilitar o dificultar esta tarea.

Aunque los dos tratamientos, el unidimensional y el multilineal, son equivalentes desde el punto de vista de los resultados, sin embargo, distan mucho de serlo desde el punto de vista didáctico.

En lo que sigue analizaremos obstáculos, dificultades y concepciones de los alumnos, para concluir con una propuesta didáctica de tratamiento en la escuela.

Actividad 1:

- Pase revista a los libros de texto. Obsérvese qué procedimientos se usan para hallar la superficie o el volumen. ¿Cuáles predominan, los unidimensionales o los multidimensionales?
- ¿Por qué es más fácil hacer una medida directa de la masa que de la superficie? ¿Qué papel juegan la forma de la superficie y de la unidad?

2. Objetivos

- Examinar las dificultades específicas que concurren en la enseñanza de las magnitudes multilineales.
- Conocer los conceptos de medida producto y producto de medidas.
- Inventariar los obstáculos que aparecen en la enseñanza-aprendizaje de la magnitud superficie.
- Proporcionar medios didácticos para abordar el tratamiento de la superficie en la Educación Primaria.
- Estudiar las concepciones de los alumnos en torno al volumen.
- Analizar el origen y naturaleza de las dificultades y obstáculos que aparecen en el tratamiento del volumen.

3. Consideraciones sobre las prácticas escolares en torno a la superficie

En relación con la superficie, los objetos habitualmente utilizados son fundamentalmente formas geométricas bien conocidas, reconocibles, matematizadas y, por tanto, objetos teóricos. Se presentan en general como figuras dibujadas, formando parte de la hoja de papel, y es poco habitual encontrarlas recortadas. Este hecho no favorece a nuestro juicio la ya difícil decantación entre longitud y superficie, ya que lo que aparece destacable en todo momento es la línea que constituye la frontera, sin que muchas veces el alumno reconozca la superficie como el interior delimitado por dicho borde, constituyendo un claro obstáculo didáctico.

Un ejemplo claro de obstáculo epistemológico lo constituye la noción de perímetro en relación con la de superficie. Los alumnos de Primaria creen que el área de una figura depende de la medida de sus lados, lo que es cierto sólo de manera local: para los polígonos regulares. Fuera de este contexto, cuando se generaliza a otra clase de figuras, es falso que la superficie dependa del perímetro. Esta constatación, aun repetida muchas veces, no impide que los alumnos, durante mucho tiempo, sigan identificando área y perímetro.

Actividad 2:

- Pasar revista a las cuatro condiciones, enunciadas en el Capítulo 2, que caracterizan un obstáculo epistemológico, a efectos de ver que la identificación perímetro-superficie es en efecto un obstáculo epistemológico.

Conocida la identificación clásica entre perímetro y superficie, sobre la que enseguida volveremos, parecería razonable que medidas de poco coste didáctico y alta rentabilidad, tales como dar recortadas las superficies, fueran adoptadas de forma generalizada en la escuela. Tal medida permitiría mediante el tacto una diferenciación muy clara entre líneas y superficies, y una apreciación de la bidimensionalidad. Además, el descubrimiento de distintos criterios para establecer la equivalencia de superficies requiere, si se busca un aprendizaje significativo, de la posibilidad de recortar, pegar, trasladar, girar, etc., las superficies, lo que evidentemente es casi imposible con superficies dibujadas[2]. Por tanto, entendemos que una variable didáctica importante en relación con la superficie y los objetos a considerar es la de dar o no las superficies recortadas.

Una de las situaciones didácticas de la ingeniería didáctica, que sugeriremos para el tratamiento de la superficie, está dedicada a hacer descubrir a los alumnos, mediante criterios que sean operativos en la práctica, cuándo dos superficies son equivalentes. En la situación anterior, en la que se ha usado un tangram[3], el criterio para decidir si dos superficies son equivalentes ha sido el siguiente: «dos superficies son equivalentes si pueden ser construidas con las mismas piezas del mismo tangram». La situación es la siguiente:

1) Objetivo didáctico

El objetivo del ejercicio que sigue es el de establecer una relación entre el trabajo de la primera sesión[4] y las situaciones que siguen, permitiendo la introducción a nivel local, de la definición de superficies equivalentes.

2) Material

- Dos figuras de forma diferente, equivalentes en superficie, recortadas en papeles de color diferente, para cada dos alumnos.
- Tijeras y pegamento.

3) Desarrollo

La maestra distribuye a los alumnos en grupos de dos y da a cada grupo el material indicado más arriba. Después dice a los alumnos:

4) Consigna

«Las dos figuras que os he repartido son dos superficies equivalentes, han sido construidas con el mismo tangram, pero no lo tenemos aquí. Debéis probar que se trata de dos superficies equivalentes.»

[2] La ingeniería didáctica que presentaremos, sobre la superficie, ha sido especialmente fructífera en este punto. Ha sido posible encontrar una gran variedad de métodos para determinar si dos superficies son o no equivalentes, y ello gracias, en parte, a la rentabilidad obtenida de la manipulación de superficies que se ha podido hacer al estar éstas recortadas.

[3] Si bien se comenzó usando el tangram más común, aquí tangram designa un juego de piezas cualquiera, no tiene por qué ser el tangram tradicional.

[4] En esta sesión, los alumnos trabajan con el tangram y se establece la noción de superficie equivalente. Dos superficies son equivalentes si pueden ser construidas con las mismas piezas del mismo tangram.

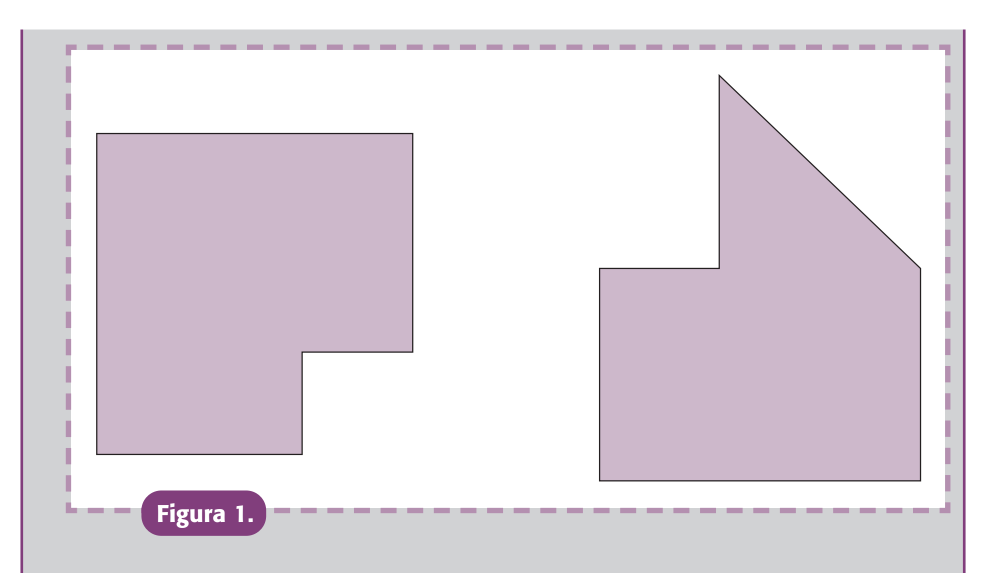


Figura 1.

Debéis estar en condiciones de probarlo.

La maestra deja 8 minutos de trabajo a los alumnos.

Si nadie ha encontrado nada, la maestra pregunta expresamente: «¿Podríamos cubrir una superficie con pedazos de la otra? Probadlo.»

Para proceder a la verificación la maestra pide a un alumno que explique cómo lo ha hecho. Después, pregunta a los otros si han hecho lo mismo. Si algún grupo ha empleado un método distinto les pide que lo expliquen.

5) Aportación de informaciones por parte de la maestra

En el debate se ha debido concluir que una superficie puede descomponerse en los mismos trozos que la otra, y que una de las superficies se puede pavimentar con la otra, por el hecho de tratarse de superficies equivalentes.

La maestra da la definición siguiente: «Cuando una forma puede pavimentarse con la otra, se dice que son equivalentes, que tienen la misma cantidad de superficie.»

Como consecuencia se obtienen los teoremas que siguen, que podrían eventualmente ser expresados como teoremas en acto por los alumnos:

«Si una superficie puede pavimentarse con los trozos de la otra, las dos tienen la misma cantidad de superficie, el mismo área.»

«Dos superficie son equivalentes, tienen el mismo área, si el recortado de una permite recubrir la otra.»

Se trata de una situación a-didáctica de validación. Los alumnos deben elaborar pruebas, encontrar un método que les permita probar que las dos superficies son equivalentes. Como las figuras están recortadas, los alumnos pueden superponer con facilidad, y en posiciones diferentes, las dos figuras, lo que les permite apreciar que lo que sobresale en una es lo que podría ponerse en la otra. Otros recortan lo que sobresale de una y colocan ese trozo de manera que se obtenga la forma de la otra superficie. Otros tratan de reproducir el mismo tangram sobre las dos superficies.

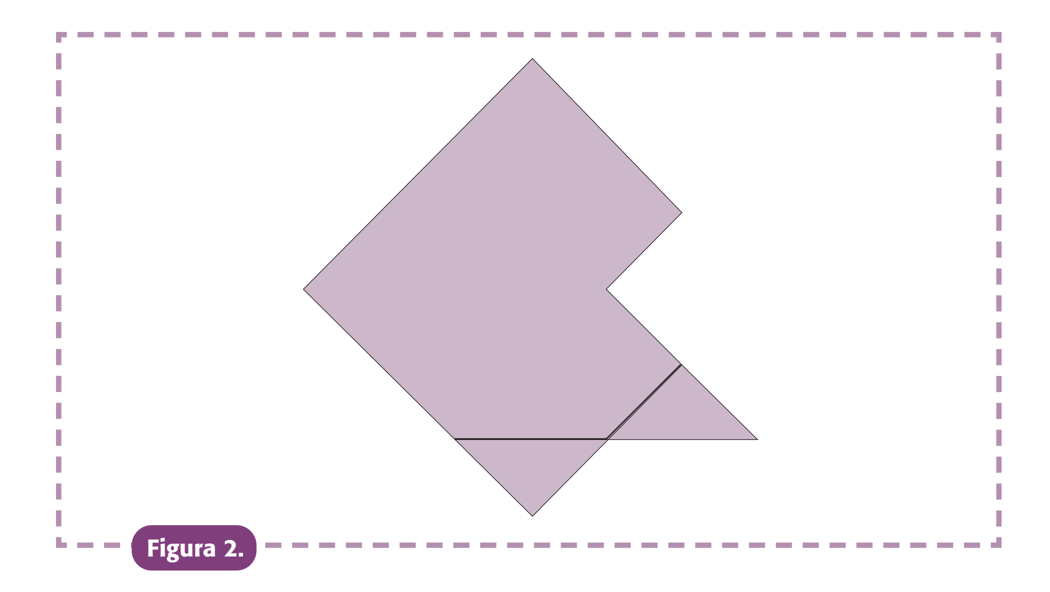


Figura 2.

Los métodos ensayados en esta situación van a permitir que los alumnos los hagan operacionales en la situación siguiente, en la que deben clasificar y ordenar, atendiendo a su superficie, seis figuras muy distintas perceptivamente, que evidentemente se dan también recortadas en cartulinas de colores diferentes:

Los métodos utilizados por los alumnos son los siguientes:

$M_{1.}$- Recortado de una superficie buscando pedazos comunes a las dos superficies: 5 grupos

M_2- Búsqueda del tangram (piezas conocidas del mismo): 6 grupos

M_3- Estimación visual: 2 grupos

M_4- Medida de las longitudes de los lados: 2 grupos (1 grupo identifica explícitamente el perímetro con la superficie)

M_5- Mixto (superposición y recortado): 1 grupo

M_6-Utilización de los triángulos pequeños del tangram (ver que cabe la misma cantidad de piezas en las dos superficies): 7 grupos

M_7- Otros (superposición): 2 grupos

Como puede verse, muchos de estos métodos sería difícil que emergiesen si las superficies se diesen dibujadas en vez de recortadas.

Las situaciones didácticas de esta sesión (la segunda), dedicada a la equivalencia de superficies, son situaciones de validación y acción respectivamente. La primera situación consistente en probar una afirmación de la maestra (las dos superficies entregadas son equivalentes) requiere de los alumnos la elaboración de pruebas empíricas a partir de la acción. Sólo a partir de la manipulación y acción

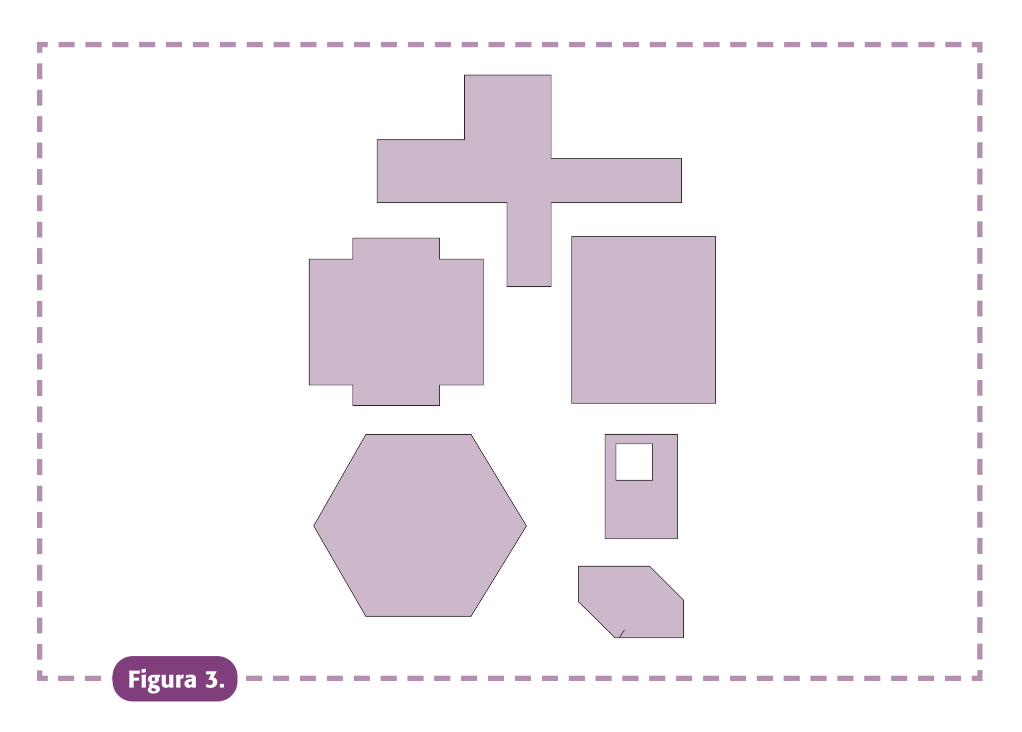


Figura 3.

sobre las superficies van a poder los alumnos elaborar una prueba, lo que es posible gracias a la organización específica del medio. Evidentemente, la posición de todos los alumnos es simétrica, todos tienen la misma información y actúan sobre el mismo medio material.

Las superficies escogidas juegan un papel como variable didáctica, en el sentido de que permiten desencadenar determinados procedimientos de prueba, en particular la descomposición-recomposición de la superficie, considerada como estrategia más eficaz en este período del aprendizaje.

Actividad 3:

- Enumerar y analizar los métodos de determinación de equivalencia de superficies que podría usar el alumno si las figuras no estuviesen recortadas.

Actividad 4:

- De los métodos enumerados, ¿cuáles son procedimientos de comparación directa y cuáles usan algún intermediario?

Actividad 5:

- Recortar las figuras (Fig. 3) y determinar cuáles son equivalentes en superficie. Comparar el método usado con los utilizados por los alumnos.

La utilización de objetos reales es especialmente complicada en la magnitud superficie. Encontrar la superficie de un objeto de forma, digamos irregular o poco asimilable a una regular, no es un problema simple, baste recordar que nociones nada elementales como la integral de Riemann, y más tarde la generalización de Lebesgue a funciones medibles, fueron concebidas para resolver de forma satisfactoria el problema del área, sobrepasados los métodos de descomposición finita y exhaución. Una buena comprensión de la teoría de la medida requiere un dominio suficiente de las técnicas del análisis matemático, fundamentalmente en lo referente al cálculo diferencial e integral, lo que por su propia naturaleza escapa del ámbito de la enseñanza elemental, forzando una limitación a medidas discretas, o a lo que pudiéramos denominar funcionamiento discreto de una magnitud continua (aproximaciones, casos muy particulares, abuso de exactitud, etc.) y, por supuesto, a objetos muy seleccionados.

Incluso si se utilizan objetos teóricos, matematizados, las limitaciones propias de la enseñanza elemental obligan a la utilización de polígonos regulares, superficies descomponibles en éstos, o que podamos aproximar mediante polígonos, ya que los medios de los que se dispone en este nivel son muy modestos, y operan por tanto restricciones importantes sobre la posibilidad de utilizar otras superficies.

Podría pensarse que el problema queda resuelto cuando utilizamos superficies fácilmente reconocibles, prototípicas, tales como polígonos regulares, lo que también encierra sus dificultades. Dicen Berthelot y Salin a este respecto:

«El reconocimiento de las formas geométricas se efectúa de igual modo que el más general reconocimiento, por ejemplo, de las personas. (...) El nombre es el modo de identificar un objeto, de marcar su importancia cultural.

La forma *rectángulo* no puede ser reducida a la del cuadrado. Hay ciertos parecidos, pero hay un rasgo distintivo: el rectángulo tiene un lado más corto que el otro. La forma rectángulo supone además, para ser reconocida, ciertas características que Wermus ha llamado componentes contextuales, una relación entre el largo y el ancho comprendidos entre ciertos valores, dimensiones no demasiado pequeñas...

La forma *rombo* está particularmente ligada a la posición, y no tiene que ver con el cuadrado, que es reconocido al girarlo.

La forma *círculo* está ligada a la del disco, y expresa la redondez del contorno de un objeto, y se expresa por *redondo*, como una pelota. Es el aspecto curvatura constante lo que está más cerca de esta aproximación, que no tiene razón alguna para ser conceptualizada».[5]

Los objetos idealizados, de finalidad didáctica, se utilizan de forma muy limitada, ante la imposibilidad de hallar modelos que respondan en simultáneo a las condiciones de fácil decantación de atributos y fácil manipulación y medida. En la mayoría de los casos, se trata tan sólo de objetos matematizados, que se dan dibujados con sus dimensiones lineales, recubiertos de ciertos visos de

[5] Berthelot, R. y Salin, M. H.: *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse Université de Bordeaux.

realidad: un campo de fútbol (un rectángulo, cuya superficie se encuentra después por procedimientos aritméticos), el suelo o pared de una habitación (un polígono regular, casi siempre un cuadrilátero), una parcela de terreno (yuxtaposición de polígonos), una plaza de toros (un círculo), etc.

Se trata nuevamente de una ficción, las medidas efectivas encaminadas por ejemplo a hallar la superficie de un terreno de fútbol no se llevarán nunca a efecto; nunca se irá al terreno de juego ni se realizará manipulación alguna. El maestro sabe que se trata de una evocación, pero en aras del funcionamiento de la relación didáctica, debe ocultar que se trata de una metáfora en la que se reemplazan las magnitudes físicas por los números[6], y que produce una inversión epistemológica importante desde el momento en que hay una enorme distancia entre la teoría que subyace y la práctica que se realiza.

Actividad 6:

- Hacer una lista del tipo de objetos o figuras que los manuales escolares proponen para hallar el área.

La utilización de objetos reales concretos plantea un cúmulo de problemas. O bien se toman objetos como los citados más arriba, o bien nos encontraremos con objetos cuya superficie no puede ser encontrada por procedimientos simples. La especificidad de la superficie en relación con otras magnitudes de la enseñanza elemental reside en el problema planteado por la forma. La forma aparece ligada a la superficie hasta el extremo de que los individuos, hasta bien entrados los 12 años, identifican ambas nociones como inseparables la una de la otra.[7] Incluso cuando sólo se utilizan objetos matematizados, los alumnos tienen dificultades para decantar la variable forma, que se constituye frecuentemente en un obstáculo al área.

El cálculo del área de una superficie debe poder calcularse con medios muy modestos, como corresponde a la enseñanza elemental, lo que obliga, como ya hemos dicho, a hacer una elección restrictiva en el tipo de superficies tratables en la escuela, que recae en los polígonos regulares, y no todos.

4. El papel de la forma en la concepción de la superficie. La noción de equivalencia

La primera constatación relativa a la superficie tiene que ver con la confusión del vocabulario; hay una identificación en los libros de texto y en el ámbito

[6] En el capítulo anterior hemos llamado a tal efecto aritmetización de la medida.

[7] Las experiencias relatadas en Bang, V. y Lunzer, E.: *Conservations spatiales*, París, Etudes d'épistémologie génétique, PUF, 1965, muestran bien que la conservación de la superficie incluye para muchos individuos también la de la forma. Nuestras propias experiencias así lo confirman. Véase el ejemplo tratado en el Capítulo 3.

escolar de términos como forma, superficie y área, sin que se sepa a menudo si se habla de la magnitud o de su medida, si nos referimos al objeto soporte o a la consideración en él de la magnitud. Esta confusión esconde detrás problemas, tales como la influencia de la forma, que vamos a analizar seguidamente, o los problemas de medición, que abordaremos más adelante.

Si bien es frecuente hacer comparaciones de objetos atendiendo a su longitud, incluso fuera de la escuela, las comparaciones de superficie no abundan ni en la realidad ni en los ejercicios didácticos que se proponen a los escolares. Si a lo anterior se añade el hecho de que las dificultades intrínsecas a tal comparación son muy superiores en esta magnitud que en la longitud, todo ello, determina un marco que explica en cierta forma por qué los currícula de muy diferentes épocas no consideran como objeto de enseñanza los métodos de comparación de superficies.

Las recomendaciones metodológicas de muchos currícula, en el sentido de realizar mediciones de objetos de la vida corriente, deben ser en cierta forma desoídas, dada la casuística y las dificultades que se presentan en la realidad, y que darían situaciones muy difíciles de gestionar con los conocimientos que los alumnos poseen en las edades previstas para el aprendizaje de la superficie.

Hemos destacado además, en el apartado anterior, la tendencia generalizada a presentar siempre las superficies dibujadas en vez de recortadas, lo que necesariamente va a condicionar y limitar las posibilidades de comparar dos superficies. Incluso recortada la superficie, ésta se encuentra necesariamente ligada a un objeto de cierto espesor, por mínimo que pueda ser, lo que sugiere, a efectos de conservación, si ésta se refiere a la superficie o a la sustancia del objeto, planteando el problema más general ya señalado por Piaget, de las relaciones entre el espacio geométrico y el objeto físico.

La determinación de la equivalencia de dos superficies supone la utilización de métodos que van de la superposición a la equidescomposición[8] o a la equicomplementariedad. La utilización de tales métodos necesita conocimientos que pertenecen tanto al dominio del espacio como de la geometría y no son simples.

Hemos constatado en las experiencias llevadas a cabo en la escuela[9] que este tipo de conocimientos necesita de una enseñanza específica, y que su adquisición no puede dejarse a cargo del alumno. Los conocimientos implicados en el reconocimiento de la equivalencia de superficies son muchos e importantes, de ahí que su construcción deba constituir un objeto de enseñanza. Por otra parte, el trabajo con la noción de equivalencia y la constitución de cantidades de superficie es una manera de asegurar una mejor apreciación de la magnitud, así como su mejor decantación del perímetro.

---

[8] Si dos figuras A y B pueden descomponerse en otras y éstas resultan ser iguales, entonces A y B tienen la misma superficie.

[9] Véase CHAMORRO, M.C. *et al.*: «La observación de ingenierías didácticas como método de mejora en la enseñanza de la didáctica de las matemáticas», *Proyecto de Innovación Educativa,* Vicerrectorado de Estudios de la UCM., 2002.

El descubrimiento de los métodos más adaptados para comparar superficies concretas, dado el papel que como hemos visto juega la forma, requiere planificar situaciones didácticas adecuadas que supongan la conquista de métodos de comparación cada vez más operacionales.

Entre los distintos atributos, predicados amalgamados en terminología de Wermus[10], constitutivos de la noción de superficie, se encontrarían por ejemplo: la forma, la conexión, la disposición espacial, ser plana, tener un borde bien definido, no tener espesor, la proporción entre las dos dimensiones, tener una forma fácilmente asimilable a un polígono, etc., unidos de manera indisociable, de forma que la alteración de alguna de estas características daría como resultado la no identificación de superficies idénticas en cuanto a la cantidad de superficie. Incluso cada uno de estos predicados amalgamados es susceptible de ser descompuesto en sus componentes contextuales, por ejemplo las relativas a la noción de rectángulo, que pueden llevar claramente a situaciones de no reconocimiento de la misma superficie.

La noción de superficie podría ser claramente dependiente de las situaciones escolares en que ha sido presentada, así como de los objetos soporte utilizados, haciendo corresponder al concepto superficie propiedades en el pensamiento natural o espontáneo, que resultarían inexistentes o falsas en el terreno de la lógica formal.

Por ejemplo, el uso abusivo de cuadrículas como medio único para determinar el área de una superficie, podría dar una representación de la superficie próxima a un rectángulo y, en todo caso, a un polígono fácilmente cuadriculable y sin agujeros.

La costumbre de trabajar con superficies que están dibujadas, o bien deben dibujarse, daría una componente contextual que podríamos llamar borde, y que en un proceso posterior de centración y decantación, produciría la constatada identificación superficie/perímetro.

El uso repetido de unidades de superficie de forma cuadrada, inducida a su vez por el casi exclusivo uso de superficies rectangulares, daría una componente contextual *forma* al predicado amalgamado unidad de superficie.

A nuestro juicio, la componente dominante principal de la noción de superficie es la de forma, de hecho, es imposible concebir una superficie sin forma. Cuando los alumnos identifican una superficie lo hacen en primer lugar a través de la forma, de ahí que cualquier cambio en ésta lleva aparejada la idea de que se ha obtenido otra superficie diferente que no guarda con la primera relación

[10] WERMUS, H.: «Essai de répresentations de certaines activités cognitives á l'aide des prédicats avec composantes contextuelles», en *Archives de Psychologie*, vol. XLIV, p. 208, 1976, enuncia la teoría de que la lógica espontánea, también llamado pensamiento natural del niño, funciona de manera distinta a la lógica formal; en ésta, los predicados se combinan según las operaciones lógicas (conjunción, disyunción, negación, etc.), en tanto que en la lógica espontánea se combinan de forma amalgamada lo que Wermus llama componentes contextuales, con propiedades bien distintas a las de los conectores lógicos y las proposiciones.

alguna; por lo que si el cambio de forma ha sido relevante, el alumno niega la conservación de la superficie. Las pruebas llevadas a cabo por Piaget en «La conservation et la mesure de surfaces»[11] pueden perfectamente ser interpretadas bajo este punto de vista.

Piaget procede a sustraer superficies parciales congruentes a dos superficies totales iguales, presentando la experiencia bajo la historia del prado, la vaca que pasta en él y las casas que se van construyendo. En tanto que el número de casas construidas es pequeño, y permite por tanto el reconocimiento de formas similares, los individuos reconocen de buen grado la conservación de la superficie del prado, aunque naturalmente el reconocimiento de la igualdad depende no sólo del número de casas construidas, sino del estadio evolutivo del sujeto. Piaget relata el caso de individuos que han reconocido la igualdad de superficie hasta la introducción de catorce parejas de casas, y que bruscamente en la introducción de la decimoquinta casa la han negado, al producirse una configuración perceptiva muy distinta, que hace estimar que la cantidad de hierba disponible en los dos prados no es la misma.

La explicación parece clara utilizando las teorías de Wermus. La conservación de la superficie es claramente dependiente de la forma, que actúa como componente dominante a la que se subordinan los otros componentes contextuales de la superficie. Los niños de entre 5 años y medio y 6 años no tienen dificultades para el reconocimiento de la igualdad sea cual sea el número de casas colocadas, lo que es determinante es que la superficie verde que queda sin cubrir tenga la misma configuración en los dos prados, y constituye el punto clave para pasar de la composición intuitiva a la composición operatoria aditiva, que supone una movilidad reversible y lleva a la idea de compensación, garantizándose así la conservación de forma generalizada.

Hay que destacar que las magnitudes geométricas tales como los ángulos, la superficie y el volumen gozan de propiedades que sólo pueden ser captadas a partir de las deducciones lógicas, ya que la deducción geométrica debe sobrepasar las imágenes intuitivas, de manera que los datos geométricos obtenidos del exterior deben organizarse en un conjunto estructurado. De ahí su mayor dificultad frente a otras magnitudes.

5. La identificación entre área y perímetro

No podemos pasar por alto el problema, ligado a la conservación, de la identificación entre superficie y perímetro, constatado por Vinh Bang y Lunzer[12]. Estos autores diseñan un abanico de pruebas, que con técnicas diversas tratan de dilucidar en qué medida una representación sensible favorece una cierta

[11] Piaget, J. *et al.*: *La géométrie spontanée de l'enfant*, París, PUF, 1973, capítulo XI.

[12] Vinh Bang y Lunzer, E.: *op. cit.*

geometrización, o si por el contrario ésta puede falsear el razonamiento operatorio si la imagen no se subordina a la operatividad. Las técnicas consisten básicamente en la transformación progresiva de figuras, representadas con ayuda de hilos fijados por alfileres, láminas de latón unidas y articuladas, alambre articulado, hilo con un nudo corredizo, etc. En otros casos se trata de construir superficies geométricas a partir de un perímetro constante materializado por espaghetis de plástico. O bien, la deformación de una superficie, materializada con ayuda de un hilo y una plancha de clavos, con conservación del perímetro.

En los niveles inferiores, de los 5 a los 6 años, el niño se representa la transformación de una figura como un desplazamiento en el espacio; de los 7 a los 8 años, la deformación de una figura produce juicios contradictorios sobre las superficies y perímetros resultantes. En el caso por ejemplo de la deformación de un cuadrado o rombo de latón, de lados indeformables, el niño admite por ejemplo que las superficies permanecen idénticas, a la vez que los lados del contorno se hacen más pequeños, como si la figura y su marco fueran cosas diferentes. Hay una falta de coordinación en la variación de las dimensiones de los elementos que componen la figura. Postulan la inferencia de que si el perímetro es constante, entonces la superficie es constante.

Entre los 8 y los 10 años, prima la inferencia de que si el perímetro es constante, entonces la superficie es constante, la conservación de uno entraña la de la otra y recíprocamente. La compensación por adición y sustracción de las dimensiones, que es correcta, en tanto que compensación de longitudes, da lugar a la compensación de dimensiones de la figura, de donde se deduce una conservación de la superficie, lo que muestra bien la indiferenciación en este nivel entre perímetro y superficie. La contradicción perceptiva que se produce para transformaciones próximas al límite, con desaparición completa de la superficie, hacen aceptar al niño la existencia de dos clases de transformaciones juxtapuestas y no coordinadas entre sí, deduciendo que existe una categoría de figuras de superficie más pequeña cuando se aproxima el límite de la transformación. Construida ya la invariancia de la superficie, ésta se extiende automáticamente a la del perímetro.

De 10 a 12 años hay ensayos para compensar las dos dimensiones, ancho y largo de la figura. Esta compensación denota el deseo de mantener el perímetro constante (el hilo es siempre el mismo), y a partir de esta compensación de dimensiones, puesto que el producto de ambas queda invariante, deducir sin más la conservación de la superficie, pues hay una especie de anulación recíproca entre lo que aumenta y lo que disminuye. El niño no consigue generalizar la seriación de las superficies obtenidas por transformación, y continúa admitiendo una clase de figuras transformadas cuya superficie permanece constante. Lo que le impide extrapolar la seriación al conjunto de todas las transformaciones es el hecho de que el niño se centra en dos estados de transformación de la figura, lo que no le permite representarse la continuidad de la transformación.

A partir de los 11 o 12 años hay una generalización del decrecimiento de las superficies transformadas, y la aceptación de la continuidad en las transforma-

ciones, con anticipación de los límites de la transformación, ya sea cero o infinito, constatándose mayor dificultad para representarse el límite infinito. Hay una diferenciación de las relaciones entre superficie y perímetro. La idea del decrecimiento de la superficie, manteniendo constante el perímetro, permite diferenciar la superficie y el perímetro. Sin embargo, el niño no admite de forma inmediata el razonamiento inverso: con perímetro constante la superficie varía, luego si la superficie permanece constante, el perímetro variará a su vez, pensando sin embargo que se necesita el mismo perímetro.

La incidencia de la identificación o interdependencia entre superficie y perímetro será abordada más adelante, cuando hagamos el estudio de la ingeniería didáctica relativa a la superficie que ha sido experimentada.

6. Ingeniería didáctica para el aprendizaje de la superficie

Tampoco ahora podemos describir todas las sesiones en su integridad, pero trataremos de dar una visión general que podrá ser profundizada en la bibliografía que se indica[13]. Siguiendo el método de entornos que ya vimos en el capítulo anterior para la longitud, la ingeniería tiene varias partes.

Primera Parte: el entorno físico de la magnitud.

– Apreciación de la magnitud (1 sesión)

En la primera sesión dedicada al reconocimiento y decantación de la magnitud superficie, se construye un medio material a través del tangram. La tarea planteada a los alumnos tanto en la primera (prever si una determinada superficie se puede pavimentar con el tangram pequeño, mediano o grande) como en la segunda situación (prever de tres superficies dadas cuál se pavimenta con el tangram mediano), sólo puede ser resuelta con éxito si el alumno realiza una anticipación, consistente en la estimación de una superficie, lo que requiere evidentemente de su decantación. Esta anticipación supone el uso de los modelos implícitos que el alumno tiene, y que le ayudan a hacerse una representación de la superficie.

Segunda Parte: las operaciones en la σ-álgebra

– La equivalencia de superficies (1 sesión)[14]

Tercera Parte: las relaciones área/perímetro (2 sesiones)

[13] Ver Chamorro, M.C. *et al.*: «La observación de ingenierías didácticas como método de mejora en la enseñanza de la didáctica de las matemáticas», Proyecto de Innovación Educativa, Vicerrectorado de Estudios de la UCM, 2002.

[14] Esta sesión y lo fundamental de la primera han sido descritas en un epígrafe anterior.

Los alumnos reciben un rectángulo que puede hacerse con 16 triángulos pequeños del tangram. Se les pide que lo comprueben. A continuación, deben prever el número de triángulos pequeños, manera indirecta de hablar del área, necesarios para pavimentar un rectángulo de perímetro doble.

Diez grupos prevén que la superficie de un rectángulo de perímetro doble del dado tendrá una superficie también doble. Otro grupo prevé mayor superficie, sin precisar cuánto, si bien ha dudado largo tiempo si escribir que será cuatro veces mayor. Un grupo responde que la superficie será mayor, y que depende de la forma del rectángulo, queriendo expresar sin duda que depende de la relación existente entre las dos dimensiones del rectángulo. Otro alumno, en desacuerdo con su compañera de grupo que prevé el doble, escribe que la superficie será cuatro veces mayor.

Cuarta Parte: el entorno matemático de la aplicación medida

El entorno de la aplicación medida constituye a nuestro juicio el núcleo de la ingeniería, y en ese entorno se mueven dos situaciones (una de ellas la hemos definido como fundamental) que soportan la construcción del concepto de medida.

– La medida como código (1 sesión)

En esta situación, descrita en el Capítulo 8 (pág. 225) los alumnos deben mandar un mensaje para que otros alumnos, que no ven la superficie que ellos tienen, construyan una figura de superficie equivalente a la primera. Se trata de una situación de comunicación, en la que se organiza el medio a través de limitaciones en el tipo de mensajes a enviar: no es posible dibujar y las figuras no pueden desplazarse. Estas limitaciones hacen que cualquier mensaje que no tome en consideración la cantidad de superficie fracase.

Todos los mensajes que envían informaciones no pertinentes: forma de la figura, longitudes de los lados, descripción aproximada de figuras reconocibles, perímetro, etc., dan como resultado la construcción de una superficie no equivalente a la inicial, y por tanto fracasan. Además, el hecho de que en la consigna sólo se hable de la cantidad de superficie va a permitir la validación del método, dejando a un lado la persistente dificultad de disociación forma/superficie. La validación corre a cargo de la propia situación que envía el *feed-back* necesario para rechazar o aceptar el mensaje como válido, al margen de la posición, dentro de la clase, de quien lo envía.

Como conclusión debe llegarse a que para comunicar una cantidad de superficie basta con dar un número y una unidad. La maestra institucionaliza la noción de unidad.

– La situación fundamental de la medida: el cambio de unidades (1 sesión)

En esta situación, los alumnos en grupos de cuatro, dos emisores y dos receptores, reciben una superficie y una unidad (un rectángulo para un grupo y un cuadrado para el otro). En un primer momento deben encontrar el área pavimentando la superficie con la unidad dada. En la segunda parte, el maestro les

asegura que las dos superficies son equivalentes, por lo que tienen la misma cantidad de superficie. Ahora, deberán poder explicar por qué las expresiones del área obtenidas por los dos grupos son iguales.

La justificación de la igualdad reposa sobre la relación entre las unidades que cada grupo ha usado, en este caso 2 rectángulos equivalen a 3 cuadrados. Como se ve, se trata de introducir significativamente el problema del cambio de unidades.

Quinta Parte: las unidades legales

– El centímetro cuadrado. Relación entre centímetro y decímetro cuadrado (1 sesión)

Los alumnos deben encontrar la superficie de dos figuras con tres unidades distintas, el grupo que acabe antes gana. Las tres unidades son en realidad el centímetro cuadrado, presentado bajo tres formas distintas: un cuadrado, un triángulo rectángulo y un triángulo isósceles; los alumnos que descubren que las tres unidades son equivalentes, y que en realidad se trata de una misma unidad, buscan el área sólo con una unidad, puesto que las tres son iguales, y ganan. La situación fuerza la búsqueda de equivalencias entre las unidades, y busca destruir la idea común de que un centímetro cuadrado ha de ser cuadrado.

La segunda parte de la situación pretende hacer descubrir a los alumnos la relación entre algunas unidades legales de superficie: el cm^2 y el dm^2. Ningún alumno sabe que la superficie proporcionada (un cuadrado de 10 cm de lado), que debe ser medida con el cm^2, es un dm^2, de esta forma se evita la eventual aplicación de similitudes con las unidades de longitud, que los alumnos podrían evocar, aplicando reglas memorizadas sin sentido.

Una vez finalizado el trabajo de pavimentación, en el que los alumnos han escogido como unidad el cm^2 de forma cuadrada, se pasa al debate colectivo de verificación de resultados. La mayoría en lugar de hacer el transporte manual de la unidad, se ha ayudado de la regla para ir encajando los cm^2. Algunos tienen necesidad de cuadricular toda la superficie, mientras que a otros les basta con rellenar una fila y una columna, hay quien necesita sólo una fila y quien debe pavimentar manualmente todo el cuadrado. Los distintos resultados del conteo reflejan muy bien los problemas a los que los niños se enfrentan:

100 cm^2, 10 cm^2, 110 cm^2, 90 cm^2, 81 cm^2, 104 cm^2

Surge aquí el problema clásico de coordinación entre las estructuras aditivas y las multiplicativas. Hay alumnos que después de pavimentar manualmente el dm^2 con el cm^2 pasan después a dibujar una fila de cuadraditos de 1 cm de lado, les caben 10 en una fila, y se dan cuenta de que de la misma manera podrían seguir cuadriculando cada fila hasta un total de 10 filas.

A partir de aquí muchos razonan que habrá en total 10×10, pero otros argumentan que habrá 90, pues el cuadrado de la esquina ha sido contado en la

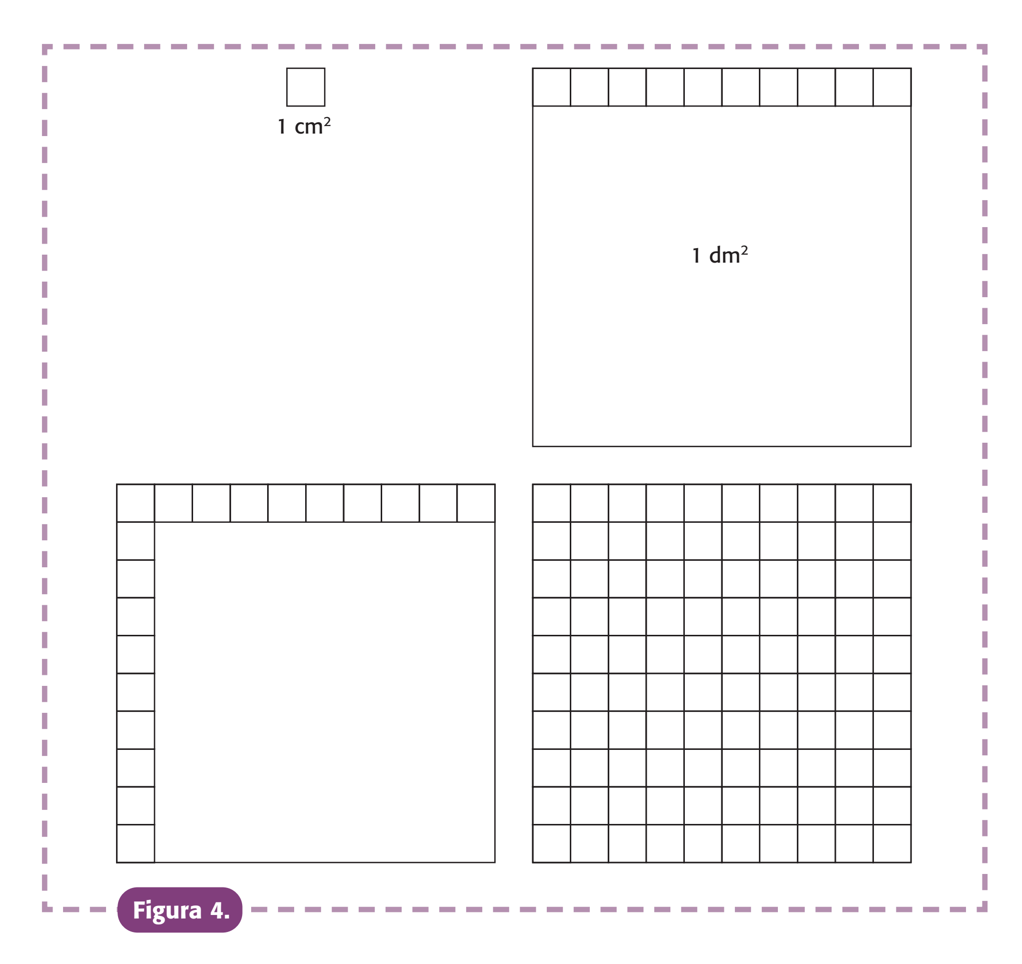


Figura 4.

fila y no puede repetirse en la columna, por lo que habrá $10 \times 9 = 90$. Por razones similares otros dicen que sólo pueden contarse 9 filas y 9 columnas para que no haya repeticiones y escriben $9 \times 9 = 81$.

Sólo cuando se pasa al modelo aditivo 10 + 10 +....... + 10 = 100, admiten, con muchas reticencias, que sí hay que contar los elementos que están en la intersección.

– El encuadramiento (1 sesión)

Se trata de encontrar el área de varias superficies sirviéndose, ahora, de un sistema de unidades, y con la condición de encontrar la expresión más aproximada. Evidentemente, las superficies no tienen una medida entera con dicho sistema de unidades.

Sexta Parte: búsqueda del área de algunos polígonos regulares

La comprensión de las estructuras multiplicativas es aquí vital, por lo que los alumnos que han tenido dificultades en el cuadriculado del dm^2 necesitan pavimentar de nuevo las figuras, manualmente o dibujando, para encontrar el área,

y tardan en deducir la fórmula que da el área en función de las longitudes de los lados. Es decir, necesitan usar durante mucho tiempo el modelo unidimensional, antes de pasar al bidimensional, por lo que se confirma el riesgo didáctico, en términos de incomprensión, y por tanto de recurrir a procesos memorizados y automatizados, que se corre al usar desde el primer momento las fórmulas que dan el área de los polígonos regulares elementales.

– El paralelogramo y el rectángulo (1 sesión).

Se comienza con un rectángulo que tiene, evidentemente y para facilitar la tarea, lados que miden un número entero de veces las dimensiones de las unidades. Las unidades que se dan dibujadas son al principio arbitrarias, para pasar en otro ejercicio posterior al cm^2.

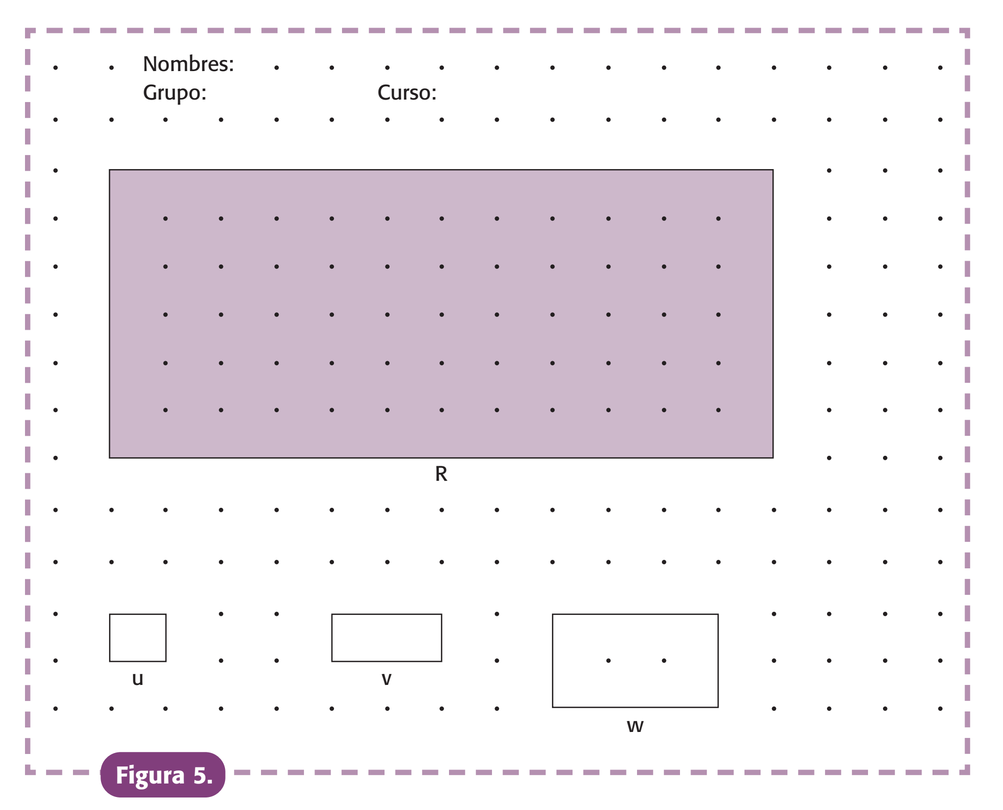


Figura 5.

Deducida el área del rectángulo se pasa al paralelogramo. Gracias al trabajo anterior de búsqueda de equivalencias entre superficies, los alumnos prueban con facilidad que un rectángulo es equivalente a un paralelogramo.

– El triángulo (1 sesión)

Para buscar la fórmula que da el área del triángulo se parte de un paralelogramo en el que se ha trazado una diagonal, dividiéndolo en dos triángulos iguales. Hay que buscar el área de los cuatro triángulos.

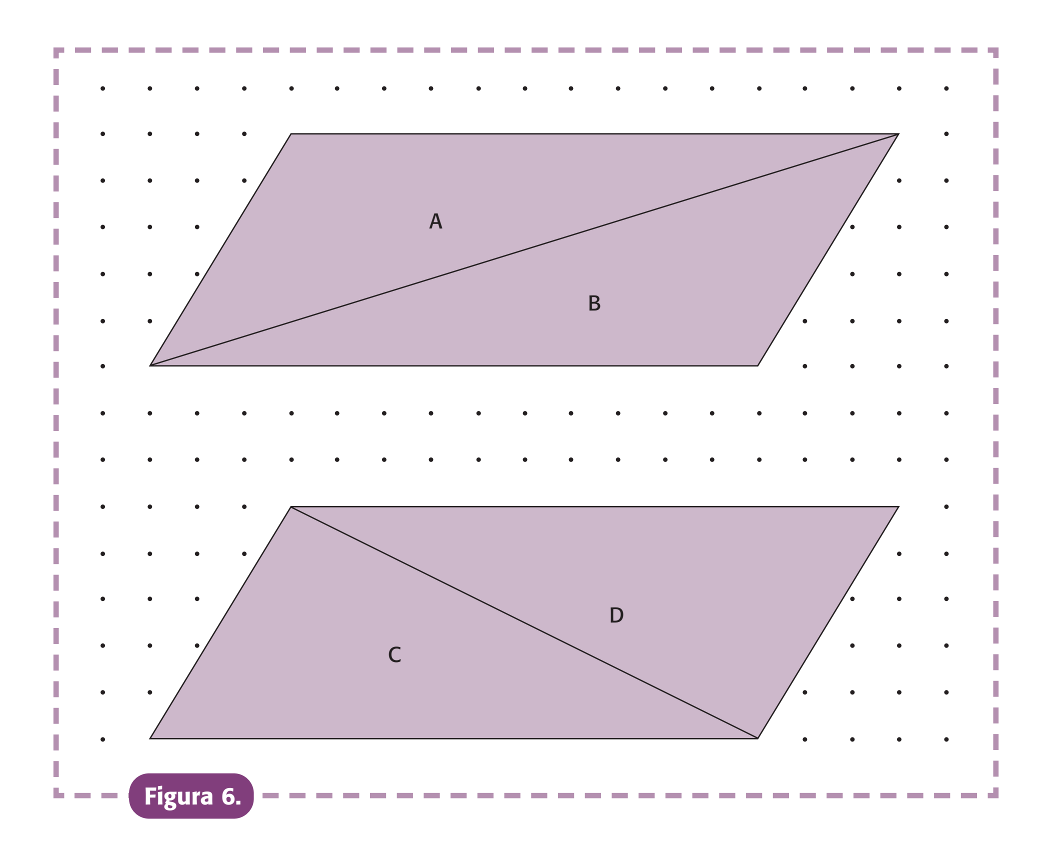


Figura 6.

Actividad 7: Diseñar, basándose en las situaciones anteriores, una situación didáctica que permita a los alumnos el descubrimiento de la fórmula que da el área de un trapecio.

7. El volumen. Presentación del problema

El estudio más exhaustivo realizado hasta la fecha sobre el volumen se debe, sin ninguna duda, a Vergnaud[15], por lo que retomaremos aquí los resultados más relevantes de esta investigación, animando al lector a que vaya a la fuente para completar esta pequeña síntesis que aquí hacemos.

En el epígrafe 1 vimos que había dos formas posibles de considerar el volumen:

---

[15] VERGNAUD, G. *et al.*: «Didactique et adquisition du concept de volume», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 4.1., 1983.

1) Como magnitud unidimensional. Se presta a la medición directa, la comparación, evaluación, etc., demanda del uso de las estructuras aditivas.

2) Como producto de medidas. Demanda de las estructuras multiplicativas y su concepción es más compleja.

Se sabe que los alumnos, en los problemas de proporcionalidad simple, comprenden mejor las propiedades del isomorfismo de medidas de la función lineal (modelo aditivo):

$$f(x + x') = f(x) + f(x')$$

$$f(ax) = a\ f(x)$$

que las asociadas a un factor de proporcionalidad constante entre dos variables (modelo multiplicativo):

$$f(x) = ax; \quad x = 1/a\ f(x)$$

un producto de medidas que pone en juego una proporcionalidad múltiple, lo que nos daría ya una justificación epistemológica de la mayor dificultad de las magnitudes multilineales.

Desde un punto de vista didáctico, la utilización de la segunda vía para la presentación del volumen puede considerarse de alto riesgo didáctico. El modelo aditivo es un obstáculo a la comprensión de la fórmula que da el volumen, pues su significación reside a su vez en la comprensión del producto de medidas, de la proporcionalidad múltiple, pudiendo dar lugar a representaciones de tipo perimétrico del volumen de las que hablaremos más adelante.

Se sabe también que la propiedades ligadas a la trilinealidad, que no son trabajadas habitualmente en clase, resultan esenciales para la comprensión del concepto de volumen.

La consideración del volumen como tridimensional supone un análisis psicogeométrico del espacio, así como su aplicación a lo numérico y lo dimensional, lo que sin duda encierra mayor complejidad que la consideración del volumen como magnitud unidimensional en la que cabe la comparación y la medida directa, como ya expusimos en la introducción.

Por otra parte, asegurar la relación que existe entre las dos formas posibles de considerar el volumen es de capital importancia, y esto se logra sólo en parte en la práctica, recurriendo al rellenado con cubos de un paralelepípedo rectángulo. La presentación clásica de la fórmula que da el volumen de un paralelepípedo rectángulo se limita a acompañar un dibujo del mismo, rellenado con cubos o descompuesto en capas, lo que, evidentemente, no es suficiente para encontrar la relación entre la descomposición aditiva mostrada en el dibujo y la multiplicativa en función de las longitudes. El trabajo más delicado se deja bajo la responsabilidad del alumno, que tiene graves dificultades para encontrar significativamente la relación del rellenado con cubos, con el producto de las tres dimensiones.

8. Diversos aspectos genéticos del volumen

En relación con otras magnitudes como la longitud o la superficie, el volumen presenta ciertas peculiaridades que hacen que algunos aspectos puedan ser comprendidos bastante más tempranamente que otros.

Así, por ejemplo, los aspectos ligados a la capacidad, tales como contar cuántas tazas contiene un recipiente, o averiguar, usando el trasvasado, qué recipiente contiene más líquido, están al alcance de los niños de 6 a 7 años. Si bien lo anterior no supone la adquisición de la conservación, que se adquiere con posterioridad a la de la cantidad de materia, el cardinal de un conjunto o la masa de un objeto. Es también evidente que la conservación de la capacidad no lleva aparejada la del volumen.

Lo anterior puede ser explicado porque muchas situaciones, las ya evocadas entre otras, sólo ponen en juego el aspecto unidimensional del volumen, a través de comparaciones directas, estimación o cálculo. Si se desea que los alumnos capten este aspecto unidimensional, debe ser estudiado sistemáticamente, de la misma forma que se hace con otras magnitudes, recurriendo a la medida directa, las comparaciones directas e indirectas; además, estas experiencias serán una gran ayuda para conceptualizar la noción de volumen, lo que sólo será posible si el alumno establece la relación entre los dos modelos.

Sin embargo, la especificidad del volumen plantea cuestiones que tardan en ser comprendidas y respondidas por los alumnos hasta al menos los 14-15 años. Por ejemplo, no es evidente que un volumen hueco y otro lleno puedan ser medidos con la misma unidad, o un volumen sólido y otro líquido, y que el número que exprese el volumen sea inversamente proporcional al tamaño de la unidad escogida.

Un ejemplo claro de obstáculo ontogenético, en alumnos de Educación Primaria, es la apreciación incorrecta del carácter tridimensional del volumen, así como de la relación que entraña con la bidimensionalidad; es decir, la comprensión de cómo la variación de las diferentes dimensiones de, por ejemplo un poliedro, influye en el volumen del mismo. Así, los alumnos menores de 13 años creen en su mayoría que si cada una de las tres dimensiones se duplica, el volumen resultante será 6 veces el primitivo; este error se debe a la dificultad en el paso de los modelos aditivos, más primitivos, a los multiplicativos, que se produce sólo en edades posteriores que garantizan un mayor nivel de desarrollo cognitivo.

9. El volumen como magnitud tridimensional

El volumen puede también ser considerado como un producto de medidas. Por ello existe una proporcionalidad entre las distintas dimensiones que aparecen en un paralelepípedo rectángulo, por ejemplo, y el volumen del mismo. Pero también aparece la proporcionalidad de una magnitud en relación a otras: volumen en relación a superficie y longitud, volumen en relación a varias longitudes.

La comprensión de las fórmulas reside en lo anterior, sobre todo las relativas a la esfera y los prismas. Los alumnos deben comprender la dependencia lineal existente entre los distintos términos que aparecen en la fórmula del volumen.

Tiene por tanto cierta importancia trabajar situaciones didácticas en las que los alumnos usen las propiedades de dependencia lineal entre el volumen y por ejemplo la superficie de la base y la altura, en el caso del prisma, es decir, la trilinearidad.

9.1. Algunos resultados en torno a los procedimientos de los alumnos para encontrar el volumen

En la investigación antes citada, Vergnaud[16] y su equipo entrevistan a una amplia muestra de alumnos de entre 11 y 15 años, a los que plantean un cierto número de cuestiones que versan, fundamentalmente, sobre la aritmetización del volumen y las propiedades ligadas a la trilinariedad. Resumimos algunas de las conclusiones a las que llegan en este estudio:

* El concepto de volumen no es dominado por los alumnos entre 11 y 15 años, y sin embargo es enseñado a los 12-13 años.
* La dificultad del concepto de volumen es subestimada, sin que los libros de texto y los profesores en general aporten una respuesta al problema.
* El cálculo directo del volumen presenta una dificultad similar a la de encontrar una de las dimensiones, conocido el volumen y las otras dimensiones.
* Si los alumnos no disponen de la fórmula que da el volumen para el paralelepípedo, el modelo geométrico del adoquinado ayuda a activarla.

CAPÍTULO 9

Entre las varias cuestiones propuestas en la investigación, que pueden ser consultadas en el texto original, nos restringiremos a las dos primeras relativas a encontrar el volumen de un acuario, materializado por una caja de cartón de la que se conocen sus dimensiones, y encontrar la estimación del volumen de la habitación en la que se desarrolla la prueba.

- Repertorio de procedimientos utilizados por los alumnos en la resolución de las cuestiones propuestas:

Los procedimientos utilizados por los alumnos, 20 de cada una de las clases de 11-12 años, 12-13 años, 13-14 años y 14-15 años, pueden ser agrupados en cuatro categorías netamente definidas y diferenciadas:

1. Tipo volumen: multiplicación de las tres dimensiones.
2. Tipo perímetro: usan el modelo aditivo, sólo se tienen en cuenta las aristas del sólido que se suman.
3. Tipo superficie: uso del producto de dos dimensiones (correspondientes, por ejemplo, a planos ortogonales) y adición de superficies (superficie lateral, o semilateral, o total).
4. Tipo mixto: uso de la multiplicación para dos dimensiones y suma con la tercera (perímetro de la base · altura, superficie de la base + la altura, etc.).

[16] *Op. cit.*, pp. 27-69.

En relación con las edades, puede decirse que los procedimientos de tipo 2 son más frecuentes entre los alumnos de 11-12 años, y van disminuyendo, hasta desaparecer en los alumnos de 14-15 años.

Los procedimientos de tipo 3 son más duraderos, y la confusión entre superficie y volumen se mantiene durante bastante tiempo.

Los procedimientos mixtos desaparecen, sin embargo, con bastante rapidez.

En relación con los procedimientos de tipo 1, cabe resaltar que no se aprecian diferencias entre los utilizados para el cálculo de volúmenes vacíos (habitación) y capacidades (acuario), utilizándose pues indistintamente.

9.2. Las concepciones de los alumnos sobre el volumen

Cuando a los alumnos, en ese mismo estudio, se les pregunta qué es para ellos el volumen, se obtienen respuestas muy interesantes y elocuentes, que pueden reagruparse en torno a las tres concepciones vistas en el apartado anterior: tipo volumen, tipo superficie y tipo perímetro. He aquí la tabla[17] resumen según edades y respuestas:

	11 años	12 años	13 años	14 años	15 años
El lugar ocupado por…	_	_	1	1	2
El espacio ocupado por…	_	_	2	2	4
Es el largo, el alto y el ancho	_	_	1	_	1
Las tres dimensiones en las que se puede uno desplazarse, moverse	_	_	1	1	2
Lo que hay dentro de una cosa		1	3	_	4
El interior de…	1	2	2	2	7
La cantidad que puede contener una cosa	1	4	1	2	8
Lo que puede contener un objeto	1	2	2	2	7
Lo que contiene	_	2	_	1	3
Es una cantidad (de hojas, aire, agua…)	3	3	_	1	7
Llenar (de agua, cubos, cajas…)	1	2	_	_	3
Es el peso	1	_	1	_	2
Es la masa que está en el aire	_	1	1	2	4
Es el aire que hay dentro	1	_	_	1	2
El conjunto de toda la habitación	_	_	2	_	2
Es la superficie	2	_	_	1	3
Es el total de m^2 de la habitación	1	_	_	_	1
Es toda la longitud de la habitación	1	_	_	_	1
Es todo el contorno	2	1	_	1	4
Es el total de la habitación	1	_	_	_	1
Son todos los lados (L, l, h)	1	_	1	_	2
Son todos los elementos de una habitación	1	_	1	_	2
Otros	1	1	_	3	5

Figura 7.

[17] *Op. cit.*, p. 49.

Como se ve, los alumnos dan muchas definiciones. Sus representaciones corresponden a los modelos que ya han aparecido, agrupándose en las tres categorías antes mencionadas.

Por edades sólo los alumnos de 14 a 15 años consiguen conceptualizar de alguna forma el volumen, mientras que los de 11 a 13 años deben recurrir a la referencia a cantidades de agua, aire, etc.

Actividad 8: Pregunte a una muestra de alumnos de 5° y 6° de Educación Primaria qué es para ellos el volumen. Compare con los resultados de la tabla.

10. El problema de las unidades

Si la comprensión de los sistemas de medida y de las relaciones existentes entre ellas es difícil para otras magnitudes más sencillas como la longitud, a nadie le sorprenderá las dudas que los escolares tienen cuando se trata de indicar la unidad de medida correspondiente a un volumen medido.

Por una parte, existe la posibilidad de medir un volumen de líquido como capacidad, usando por tanto un sistema de unidades propio de una magnitud lineal: kl, hl, dal, l, dl, cl, ml.

Si se tiene en cuenta el aspecto tridimensional, aparece el sistema de medida: hm^3, dam^3, m^3, dm^3, cm^3, solidario del sistema de medida de longitudes correspondientes a cada una de las dimensiones.

En el primer sistema, los cambios se producen de 10 en 10, mientras que en el segundo lo hacen de 1 000 en 1 000. Comprender las relaciones y equivalencias entre dichos sistemas supone necesariamente controlar los dos modelos del volumen, y en particular el modelo multiplicativo que sustenta la trilinariedad.

Desde un punto de vista didáctico el problema que se plantea es la imposibilidad de manipular unidades del segundo sistema dado su gran tamaño, lo que impide la comprobación experimental de ciertas equivalencias, así como de la formación de la estimación del orden de magnitudes de las unidades.

A nuestro juicio, es absolutamente vital asegurarse de que los alumnos comprenden cómo funciona el Sistema Métrico Decimal en magnitudes más sencillas como la longitud o la superficie antes de pasar al volumen.

La búsqueda de equivalencias en los casos en que ello es factible debe apoyarse en la comprensión de la trilinariedad y usando como técnica el rellenado de la unidad mayor con la menor, rellenando por ejemplo un dm^3 con un cm^3, o un dm^3 con líquidos medidos en centilitros.

11. La aritmetización del volumen

La aritmetización del volumen pone en juego la concepción tridimensional del volumen y requiere forzosamente un buen control de las relaciones multiplicativas entre las dimensiones, al que ya nos hemos referido.

Así, el cálculo de un volumen en relación a otro, usando el número de veces que es mayor en cada dimensión el primero que el segundo, resulta un tarea muy compleja para la mayoría de los alumnos entre 11 y 15 años, de forma que tan sólo en torno a los 15 años, es resuelta satisfactoriamente por algo más de la mitad de los alumnos. Las resoluciones de tipo aditivo o de tipo mixto (aditivo y multiplicativo) que guardan cierta similitud con las concepciones de tipo perimétricas, muy persistentes en el caso del área, o tipo superficie del volumen, subsisten durante mucho tiempo.

En particular cuando se trata de comparar el volumen de dos esferas conocidos sus diámetros, se constata la enorme dificultad que tienen los alumnos para representárselo de forma trilineal.

Se sabe que el uso del pavimentado suele constituir una gran ayuda cuando se trata de aplicar una homotecia y calcular el volumen de la figura homotética, pero la dificultad de utilizar dicho procedimiento en todos los casos, por ejemplo en el caso de la esfera, no garantiza siempre el éxito.

En todo caso, lo que queda claro es que la adquisición del concepto de volumen va más allá de la aplicación de la fórmula, y supone la organización jerárquica de distintos elementos, como por ejemplo la comparación de volúmenes a través de las dimensiones lineales, la búsqueda de volúmenes de figuras homotéticas, etc., que son destrezas adquiridas más allá de los 14 años, destacando entre todas ellas por su dificultad, las propiedades de la trilinaliedad.

La confrontación entre el modelo aditivo del volumen como magnitud unidimensional, descomponible en capas, líneas y columnas, con el modelo geométrico del conjunto de aristas y superficies no está bien resuelta, y ello es el origen de las representaciones que aparecen de tipo perímetro y superficie.

La aritmetización del volumen requiere a la vez de operaciones geométricas, tales como el pavimentado, bien coordinadas con las operaciones aritméticas asociadas que son de naturaleza multiplicativa.

Se necesitan además otras propiedades tales como el producto de razones, en cuestiones de homotecia, que va más allá del producto de las dimensiones. La comprensión de estas propiedades es una operación mental difícil, por lo que supone de razonamiento sin el soporte de medidas concretas.

Se constata que un análisis del volumen como variable dependiente linealmente de tres variables independientes, las tres dimensiones, y como tal variable producto de estas tres variables, no aparece en la enseñanza habitual que se hace del volumen. Si a lo anterior se le añade el hecho de que el volumen guarda

una gran relación con muchos y variados conceptos matemáticos, tales como la geometría de los sólidos, las funciones lineales, longitud, área y dimensión, se comprenderá el alcance reductor de la mayoría de las propuestas didácticas que se presentan en la escuela.

Cabe concluir a la luz de todo lo expuesto, que en Educación Primaria sólo cabe hacer un tratamiento unidimensional del volumen, dejando para la Educación Secundaria los aspectos de aritmetización que ponen en juego los aspectos multilineales del volumen. En todo caso, cabe hacer trabajos de rellenado de un paralelepípedo, y prestar atención a cuestiones como éstas:

– Dirección del pavimentado.

– Tipo de adoquín.

– Método mixto más económico: pavimentado/cálculo.

Sin pretender en ningún caso la obtención de fórmulas.

Hay que saber además que:

– El uso de un pavimentado regular que haga más fácil la tarea, tanto de conteo como de rellenado, no aparece como método óptimo usado por los alumnos.

– La manipulación es usada, hasta el final en muchos casos, en detrimento de la anticipación que proporciona el cálculo.

– Los procedimientos mixtos (manipulación y cálculo) dan preferencia al cálculo de elementos de una capa, contando después el número de capas, lo que pone claramente de manifiesto la concepción unidimensional de volumen:

$$V = V\ (\text{capa}) \times \text{n}^\circ \text{ de capas}$$

– El cubo no parece como óptimo en el pavimentado, frente al cilindro.

– La contradicción entre las concepciones unidimensional y tridimensional del volumen se manifiesta ante las distintas percepciones de los alumnos, que llevan a considerar si el cubo de la esquina ha sido contado o no varias veces.

Puede asegurarse que el conflicto cognitivo provocado por lo anterior permite hablar de que el modelo de pavimentación constituye un obstáculo para acceder a la concepción tridimensional. Obstáculo que deben necesariamente encontrar y superar los alumnos.

– La manipulación y construcción de paralelepípedos con la ayuda de policubos o legos, permite una mejor aprehensión de la fórmula multiplicativa del volumen, gracias a la constitución de un modelo más rico.

Actividad 9: Hacer una lista de materiales de laboratorio de matemáticas que trabajen algún aspecto relacionado con la noción de volumen. Indíquese en cada caso la utilidad del material.

BIBLIOGRAFÍA

BANG, V. y LUNZER, E (1965): *Conservations spatiales*, París, Etudes d'épistémologie génétique, P.U.F.

CHAMORRO, M.C. y BELMONTE, J.M. (1991): *El problema de la medida*, Madrid: Ed. Síntesis.

CHAMORRO, M.C. (1995): «Aproximación a la medida de magnitudes en la Enseñanza Primaria», en *UNO* n° 3, Barcelona, Ed. Grao.

CHAMORRO, M.C. (1996): «El currículum de medida en Educación Primaria y E.S.O. y las capacidades de los escolares», en *UNO* n° 10, Barcelona, Ed. GRAO, 1996.

CHAMORRO, M.C. (1997): *Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental,* Tesis doctoral microfilmada, UNED, Madrid.

CHAMORRO, M.C. *et al.*: «La observación de ingenierías didácticas como método de mejora en la enseñanza de la didáctica de las matemáticas», *Proyecto de Innovación Educativa,* Vicerrectorado de Estudios de la UCM.

ROGALSKI, J.: «Acquisition de notions relatives à la dimensionalité des mesures spatiales», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 3.3., pp. 343-396.

VERGNAUD, G. *et al.* (1983): «Didactique et adquisition du concept de volume», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 4.1.

CAPÍTULO 10

El tratamiento y la resolución de problemas

ÍNDICE

M.ª del Carmen Chamorro y Francisco Vecino

1. Introducción

La transmisión de la herencia científica comienza en la Escuela Primaria y en la Enseñanza Secundaria Obligatoria y, evidentemente, las matemáticas forman parte de esa cultura general que hay que transmitir a las nuevas generaciones.

El período de la educación del niño que va desde los primeros años de la Escuela Infantil hasta el final de la Secundaria Obligatoria es absolutamente decisivo para los aprendizajes matemáticos fundamentales, así como para la formación de actitudes positivas o negativas hacia las matemáticas. Para muchas personas, el único encuentro con las matemáticas se produce en la escuela. Y es a partir de esta única experiencia social cómo la gente se forma una opinión de las matemáticas. Es, por tanto, importante transmitir una visión fidedigna de en qué consiste el trabajo en matemáticas.

La actividad matemática por excelencia es la resolución de problemas, cualquier matemático estaría de acuerdo en ello, si bien la noción de problema dista mucho de la que subyace en los problemas escolares, a los que pasaremos revista en este capítulo, que ocupan buena parte del trabajo escolar.

Es bien conocido también que los alumnos tienen dificultades en la resolución de problemas, pudiéndose hablar, en algunos casos, de fracaso escolar. Analizaremos aquí el origen y posible resolución de esos fracasos.

Así, durante mucho tiempo se consideró que las dificultades mostradas por los alumnos en la resolución de problemas dependían primordialmente de la complejidad de los conceptos matemáticos involucrados en su resolución, de los conocimientos matemáticos que poseían los alumnos, así como de las capacidades intelectuales de los mismos. Con el paso del tiempo, las investigaciones en psicología y en didáctica de las matemáticas han ido sacando a la luz la importancia de tomar en consideración aspectos aparentemente colaterales que se han revelado como primordiales a la hora de resolver un problema.

Se abordarán algunos de esos factores, analizando su incidencia e importancia; en particular, destacaremos el papel que juega la lectura del enunciado y la representación de la situación narrada en el mismo. Proporcionaremos, también, algunas pautas de actuación didáctica que permitan mejorar notablemente el rendimiento de los alumnos en la resolución de problemas.

2. Objetivos

- Conocer los principales elementos teóricos que intervienen en el planteamiento y la resolución de problemas.
- Reflexionar sobre diferentes categorías de problemas y determinar las más adecuadas para la Educación Primaria.

- Estudiar los diferentes factores que intervienen en la resolución de un problema, prestando especial importancia al estudio del enunciado.
- Analizar diferentes modelos de resolución de problemas, estudiando su viabilidad y adaptación a la edad y al aula.
- Proporcionar técnicas para la elaboración de problemas.
- Prever y adecuar el cambio del contrato didáctico clásico al caso específico de la resolución de problemas.

3. El tratamiento y la resolución de problemas

Es muy frecuente encontrar, tanto en los textos de matemáticas como en los escritos de didáctica de las matemáticas, que la actividad matemática por excelencia consiste en la resolución de problemas, y que en el aprendizaje de las matemáticas se debe enfrentar al alumno a la verdadera actividad matemática: la resolución de problemas.

El currículo español de Educación Primaria incluye un bloque temático específico de resolución de problemas, al que da la consideración de transversal. Y es que la capacidad para plantearse y resolver problemas está en la base de todo conocimiento científico, es a menudo un reto para el individuo y constituye la actividad mental por excelencia del ser humano: descubrir.

Lo que parece estar fuera de toda duda es que resolver un problema va más allá de hacer una operación y encontrar su resultado, es algo más que ejecutar un algoritmo, tiene que ver más con hacer preguntas relacionadas con la matematización de un problema real, o bien con la construcción de nuevos objetos matemáticos, y responder a esas preguntas. Lo anterior indica ya que vamos a encontrarnos con dos tipos de problemas: los que surgen del interior de la propia disciplina y los que provienen del mundo exterior, de la vida real.

Trabajar con este segundo tipo de problemas plantea cuestiones fundamentales sobre las relaciones entre matemáticas y realidad, y sobre la posibilidad de un funcionamiento autónomo de las matemáticas. Estos problemas van a ser prioritarios en los niveles que nos ocupan (6 a 14 años), lo que no implica en modo alguno que no puedan abordarse situaciones-problema, en forma de juego, que carezcan de anclaje en la realidad.

Actividad 1: Buscar en los libros de texto problemas, clasificarlos atendiendo a que tengan alguna conexión con la realidad, o bien procedan del interior de las propias matemáticas.

De lo anterior puede deducirse que el papel que se asigne a la actividad de resolución de problemas va a ser determinante, y va a marcar una elección didáctica importante, según que la función asignada a esta actividad sea: la tra-

dicional, en la que el problema aparece únicamente como criterio para determinar el saber del alumno y vinculada, por tanto, a la evaluación; la ligada a los métodos llamados activos, en donde el problema es utilizado como móvil del aprendizaje; o la que nosotros compartimos, en la que la resolución de problemas es a la vez fuente y criterio del saber matemático en juego. El interés por la resolución de problemas se debe, también, a la posibilidad que éstos ofrecen, para construir conocimientos matemáticos y modelizar situaciones, lo que ayuda a comprender y dominar el entorno que nos rodea.

Los niveles a los que nos dirigimos requieren prestar una gran atención a los aspectos psicológicos y semánticos que confluyen en la resolución de problemas, que cobran aquí tanta importancia, o más, que los aspectos matemáticos, por lo que estudios clásicos sobre resolución de problemas en matemáticas necesitan ser completados con otros que nos permitan comprender las causas del fracaso de los alumnos ante problemas escolares muy simples.

Para algunos psicólogos como Hoc, un problema no califica una tarea sino una situación, es decir la confrontación de un sistema cognitivo a una tarea. Desde este punto de vista, *un problema es la representación de un sistema cognitivo construido a partir de una tarea, sin disponer inmediatamente de un procedimiento admisible para alcanzar el objetivo*[1].

La construcción de la *representación* de la tarea es lo que se llama *comprensión*, en tanto que la construcción del *procedimiento* se llama *estrategia de resolución*.

Se sabe que las estrategias o procedimientos de resolución que un individuo va a poner en marcha para resolver un problema van a depender directamente de la representación que ese individuo se ha hecho de la situación. De la misma manera, el cambio de representación va a ser el resultado de los conocimientos que el individuo va a movilizar durante el proceso de búsqueda de la solución, de las acciones que va a llevar a cabo, es decir, de los sucesivos razonamientos.

Gréco[2] ha probado que hay, al menos, dos sistemas de representaciones que funcionan en el ejercicio del pensamiento natural, o espontáneo, y que intervienen en la resolución de problemas:

– Un sistema *R* de representaciones que construyen el sentido, tanto el directo, llamado legible, como el figurado.

– Un sistema *T*, bastante complejo, de tratamiento de las representaciones, y en el que existen varias categorías de esquemas: los esquemas de orientación o representación calculable (esto es una ecuación, es un problema de proporcionalidad, etc.), los que efectúan a las operaciones locales, y los

[1] Hoc, J. M. (1987): Psychologie cognitive de la planification, PUF.

[2] Gréco, P. (1988): «Structures et Significations», prefacio de la obra Bideau, J.: *Logique et bricolage chez l'enfant*, Lille, P.U.L.

que ligan los anteriores generando programas, procedimientos, algoritmos, correcciones, son los llamados esquemas de concatenación.

La comprensión es un proceso dinámico de cambio de la representación, gracias al cual el alumno pasa de una representación inadecuada, en la que atribuye a la tarea propiedades que no tiene, a una representación adecuada, y de una representación incompleta a otra completa.

4. Algunos modelos de resolución de problemas

Existen muchos modelos de resolución de problemas, que van desde los clásicos propuestos por Schoenfeld[3] y Polya[4], en el lado más matemático, más próximo a la heurística, a otros modelos más psicológicos del tipo IDEAL de Bransford y Stein[5], y las propuestas de Gestión Mental de Antoine de la Garanderie[6], pasando por modelos intermedios como el de Mason, Burton y Stacey[7].

El análisis que hemos hecho de los modelos precedentes ha tenido siempre como telón de fondo las edades a las que nos dirigimos, las características de su pensamiento y sus capacidades cognitivas, así como los objetivos de tipo matemático que se persiguen en la Educación Infantil, Educación Primaria y Secundaria Obligatoria. Nos ha interesado, también, buscar soluciones al constatado fracaso escolar en la resolución de problemas en la Educación Obligatoria, por eso, hemos prestado atención a factores que se tienen poco en cuenta en la resolución clásica que se hace en matemáticas.

Hemos descartado los modelos propuestos por Polya y Schoenfeld por considerarlos poco adecuados para el tratamiento de problemas muy elementales, si bien consideramos que los profesores deben conocer su existencia y efectuar lecturas complementarias de sus textos. Estos y otros modelos tienen, de alguna manera, el defecto de considerar la actividad de resolución de problemas como algo lineal en la que unas fases suceden a otras; las investigaciones nos dicen, sin embargo, que varios procesos intervienen simultáneamente, interactúando entre ellos a efectos de mejorar nuestra comprensión, y encaminarnos a la resolución. Además, el método de resolución tiene que tener en cuenta la especificidad de cada problema, por lo que es difícil diseñar un método único de actuación.

[3] SCHOENFELD, A. H. (1985): *Mathematical Problem Solving*, Orlando, Academic Press.

[4] POLYA, G. (1982): *Cómo plantear y resolver problemas*, México, Trillas.

[5] BRANSFORD, J. y STEIN, B. (1986): *Solución IDEAL de problemas*, Barcelona, Labor.

[6] TAURISSON, A. (1990): *La réussite en mathématiques*, Québec, Agence d'ARC inc.

[7] MASON, J., BURTON, L., STACEY, K. (1988, 93): *Pensar matemáticamente*, Barcelona, Labor-MEC.

El modelo de La Garanderie[8] tiene interés, no tanto por su clasificación de individuos en auditivos o visuales, sino por las técnicas próximas a la metacognición que usa, y que podrían facilitar muy bien la representación del problema por parte del niño, y con ello la posibilidad de extraer significaciones al discurso del problema y las acciones que en él se dan. Las investigaciones[9] han demostrado que pedir a los sujetos que están resolviendo un problema que expliquen y verbalicen sus acciones, o que traten de representarse el problema mediante imágenes mentales, produce una mejora notable en el éxito que tienen estos sujetos, y ello por el papel de modelo que juegan las imágenes en la resolución de problemas.

La noción de problema es aquí muy general, y está, en algunos casos, muy alejada de lo que en matemáticas se entiende por problema. Para nosotros, el interés de este método reside en las pautas que proporciona para el desarrollo de destrezas y estrategias generales que intervienen en la resolución de problemas, y que puede ser de utilidad potencial en los primeros niveles. En particular, el desarrollo del pensamiento lateral o divergente, la mejor explotación de la memoria y el fomento del pensamiento creativo son para nosotros los elementos fuertes de este método.

5. La lectura y comprensión de los enunciados

El enunciado de un problema es un escrito matemático particular que tiene características propias, podríamos incluso decir que es un género literario bien caracterizado que necesita para su comprensión la adquisición de ciertas claves y alguna dosis de entrenamiento.

Comprender un enunciado supone tener la capacidad para representarse, no sólo la situación descrita en el enunciado, sino también la tarea asociada a la situación que debe resolverse, lo que supone conocer, de alguna manera, las intenciones del autor del enunciado, que no siempre están implícitas en el texto. Además, en el caso de los problemas matemáticos hay un contrato implícito según el cual el contexto semántico no debe aclarar completamente el objeto del problema y la tarea a resolver, pues se considera que su descubrimiento por parte del lector forma parte de su trabajo como resolutor, por lo que las dificultades de comunicación entre el autor del texto y su intérprete se acrecientan, lo que lleva aparejada una mayor dificultad para representarse el problema.

Se dice frecuentemente que las matemáticas son un lenguaje, lenguaje que es aprendido por el niño, en simultáneo, en el caso de los primeros aprendizajes lógico-matemáticos, y generalmente con posterioridad a la lengua materna; en ambos casos, no puede negarse que existen muchas interacciones entre estos dos lenguajes.

---

[8] La Garanderie, A.: *Gestión mental.*

[9] Véase Denis, M. (1989): I*mage et cognition*, París, PUF.

Muchas de las dificultades que se han encontrado en la resolución de problemas aritméticos simples nada tienen que ver con la mala comprensión o ejecución de los algoritmos, son de otra naturaleza. Conciernen a la lectura y comprensión del enunciado, a la selección y organización de las informaciones pertinentes dadas en el enunciado, y a la traducción de esta organización en términos matemáticos. La mayor dificultad es la interpretación del contexto semántico, necesaria para interpretar y seleccionar las informaciones dadas por el enunciado, y se encuentra tanto en los alumnos de 6 años como en los de 16, y ello con la misma intensidad, lo que debería llevar a plantearnos una adecuación de los procedimientos didácticos utilizados en la enseñanza de resolución de problemas, así como a interrogarnos sobre las operaciones y procesos mentales que usan los alumnos, es decir sobre el funcionamiento cognitivo de los alumnos en situación de resolver problemas.

Así por ejemplo, pensar que los datos suministrados por el enunciado del problema son directamente tratables por el alumno es una ilusión didáctica de falsa transparencia que dista mucho de ser real; para ser utilizables deben descodificarse e integrarse en la representación del problema.

6. Factores semánticos en la resolución de problemas

Un enunciado aritmético podría ser caracterizado, en tanto que texto, de la manera siguiente:

- Es un enunciado que describe un estado o suceso, más o menos corriente, o que tiene que ver con el universo imaginario familiar del niño. A la descripción le siguen una o varias preguntas a las que el alumno debe responder.
- La situación que se describe en el enunciado está contemplada de una manera particular, resaltan los aspectos cuantitativos dando ciertos datos numéricos.
- La elaboración de las respuestas implica inferencias que ponen en marcha competencias de tipo lógico-matemático.
- La respuesta, la solución del problema, debe ser presentada de una manera particular, utilizando el lenguaje matemático.

Lo anterior hace que las dificultades de lectura del enunciado de un problema sean significativamente diferentes de las que se dan en la comprensión de un texto corriente, si bien, en ambos casos, pueden explicarse a partir del funcionamiento semántico de los niños, para lo que resulta imprescindible acudir a la noción de *representación semántica*, lo que a su vez va a enviarnos a la construcción de las estructuras mentales que la sustentan. Además, en el caso de los problemas, como ya hemos dicho, los enunciados no tienen como misión clarificar el

problema, pues se supone que es lo que debe hacer el resolutor con ayuda de los datos que se dan.

Actividad 2: Compruebe y analice en tres problemas de tres cursos diferentes, qué cuatro de los aspectos enunciados más arriba están presentes.

Por otra parte, el comportamiento de un niño, de las edades a las que nos venimos refiriendo, frente a la resolución de problemas, no puede reducirse a la dimensión cognitiva, pues las componentes afectivas y de motivación juegan también un papel fundamental y no pueden ignorarse. La autoestima, el nivel de confianza en sí mismo y una actitud positiva hacia la resolución de problemas son objetivos prioritarios a alcanzar si se desea mejorar la actual enseñanza de resolución de problemas y que el alumno tenga éxito en ella.

7. Los problemas de traducción-modelización

Para Ehrlich[10], en la resolución de un problema aritmético simple, el alumno debe realizar una traducción que comporta dos aspectos:

– Un *aspecto formal*. Se trata de pasar de un lenguaje corriente a un lenguaje formalizado, matemático, que dé como resultado la transformación del enunciado de partida en una fórmula numérica.

– Un *aspecto semántico, conceptual y temático*. Es necesario pasar de un estado, un suceso o un objeto, del que habla el enunciado, a una estructura numérica (aditiva o multiplicativa en el caso que nos ocupa).

Y en un problema de traducción hay tres tipos de dificultades:

- Las relativas al conocimiento y comprensión del mensaje de partida: el enunciado del problema.
- Las que tienen que ver con el conocimiento y la comprensión del mensaje de llegada: la operación a hacer.
- Las dificultadas ligadas al propio proceso de traducción, es decir, al paso del enunciado de la operación a hacer.

Ahora bien, la noción de traducción está ligada a la de modelización matemática, en tanto que las matemáticas son un lenguaje que sirven para expresar, *de otra manera*, los datos del problema, a efectos de poder tratar el problema de una manera más general y abstracta, por lo que esa traducción al lenguaje matemático no es ni fácil ni instantánea.

[10] EHRLICH, S. (1990): *Sémantique et mathématiques*, París, Nathan.

Actividad 3: Con ayuda de los tipos de problemas vistos en los Capítulos 5 y 6, haga una lista de las acciones que aparecen con mayor frecuencia en los problemas. Después, hágales corresponder la expresión matemática que expresa la misma acción.

Hasta ahora, las matemáticas habían presentado la noción de traducción como un medio para acceder directamente al objeto del problema, a la estructura del problema (resolver un problema es, en este contexto, pasar de las palabras del texto, de la historia narrada, a su expresión mediante símbolos u operaciones), lo que está en discordancia con las investigaciones más recientes relativas a la manera en que se produce la representación de un problema[11]. Sabemos que esta traducción sólo puede llevarse a cabo en un nivel de operacionalización que supone la existencia previa de una representación ya estructurada del problema por parte del alumno. En otras palabras, esta traducción sólo es posible cuando el alumno controla ya el problema en cuestión y puede hacer uso de un proceso de modelización. Por tanto, una de la cuestiones de las que nos ocuparemos más adelante tiene que ver con la adquisición y operacionalización de una representación del problema por parte del alumno.

8. Los operadores semánticos

En la comprensión del enunciado de partida hay que considerar distintos factores: aquello de lo que se habla, que pone de manifiesto problemas temáticos y conceptuales, y la manera en que se dice, que supone la emergencia de problemas de verbalización, fundamentalmente lexicales y gramaticales.

La distancia lingüística entre el alumno y el lenguaje especializado de las matemáticas es un hecho reconocido por todos. Por ello, la tarea de comprensión del texto de un problema se ve facilitada cuando se coloca al alumno en dominios conceptuales que le son familiares (no es igual ganar canicas que dividendos en la bolsa), y cuando los términos que se utilizan en el enunciado son también familiares, desde un punto de vista léxico y sintáctico.

Recogiendo todo lo anterior podríamos decir que el alumno necesita hacer toda una serie de modificaciones sobre lo real antes de poder disponer de una estructura matemática de acogida. Debe seleccionar las informaciones pertinentes en el enunciado, modificar su organización, especificar su categoría de pertenencia a lo real, determinar las categorías matemáticas correspondientes, etc. Además, estos «arreglos» dependen del tema del enunciado, y este tema varía de

[11] Julo, J. (1995): *Répresentation des problèmes et réussite en mathématiques,* Rennes, PUR.

un problema a otro, por lo que es difícil para el alumno sistematizar los cambios a realizar y ordenar las categorías precisas.

Un papel especial, en relación con los procesos anteriores, corresponde a los llamados *operadores semánticos* del enunciado. «Los operadores semánticos son unidades semánticas que reúnen, en una sola palabra, un concepto y una expresión verbal, y que ejercen una función específica en el enunciado, marcando, según el caso, un proceso de acumulación o comparación (...). Un operador semántico viene definido por su función en el enunciado del problema, y no por sus propiedades informativas intrínsecas.»[12]

Son operadores semánticos de acumulación aquellos que dan lugar a aumentos o disminuciones; suelen constituir, aunque no siempre, en parejas de polos y significaciones opuestas, por ejemplo: vender/comprar, ganar/perder, encontrar/perder, llenar/vaciar, reunir/separar, regalar, romper, tirar, etc. Los operadores semánticos de comparación inducen, justamente, una comparación entre estados: veces más, veces menos, más que y menos que.

Estos operadores, insertados en el enunciado del problema, inducen los cuatro tipos posibles de comparación: aditiva, sustractiva, multiplicativa y divisiva. Y es precisamente aquí donde reside una de las dificultades de interpretación del enunciado; los operadores semánticos de acumulación son a menudo ambiguos, debido precisamente a la doble significación polar que tienen, por lo que sólo el contexto y la comprensión de la narración y las acciones del texto permiten determinar cuál de las dos significaciones posibles se corresponde con el enunciado, lo que es vital para asociar a la situación el operador matemático correspondiente que resuelve el problema. Cuando el operador semántico tiene el mismo signo que el operador matemático que resuelve el problema (por ejemplo, ganar canicas en una partida ⇒ sumar), éste tiene menor dificultad que cuando el operador semántico es de signo contrario (por ejemplo, regalé canicas ⇒ restar).

Actividad 4: Redacte un enunciado en el que aparezca el operador semántico «ganar», e induzca como operador matemático una adición. Redacte ahora otro en el que «ganar» lleve aparejada una sustracción.

Se necesitan, por tanto, otros índices e indicaciones complementarias para resolver un problema, no basta con los operadores semánticos; además, ciertas acciones carecen de significación directa en relación con los operadores matemáticos; ¿qué sugieren, por ejemplo, andar, cortar, leer, pegar, etc.?, ¿cuáles son sus contrarios? Hay, por tanto, operadores semánticos nulos que no inducen ningún operador matemático. Igualmente, hay enunciados que carecen de operador semántico, por lo que los alumnos deben usar otros índices que les

[12] Ehrlich, S.: *op. cit.*, p. 31.

permitan hacer inferencias, asociando acciones a las perífrasis verbales, usando por ejemplo la inclusión jerárquica de clases, interpretando las conjunciones que aparecen en el texto, o expresiones como «en total».

Se sabe, Ehrlich lo ha estudiado y probado experimentalmente, que según sean las características semánticas de un enunciado, una misma operación puede ser bien resuelta por todos los alumnos, por la mitad de ellos o por muy pocos. Igualmente, el efecto producido por cada factor (tipo de operador, signo del operador), tomado aisladamente, es limitado, pero ciertas combinaciones pueden dar lugar a fracasos masivos. Ciertos operadores son percibidos de manera muy confusa por los niños y deberían ser reemplazados por otras expresiones.

Las expresiones *cada* y *cada uno* que suelen aparecer en los problemas multiplicativos son mal dominadas por los alumnos y llevan a errores frecuentes; lo mismo ocurre con las expresiones *«n veces menos que y»*. Por el contrario, parece que el hecho de que la pregunta del problema se encuentre al principio o al final del enunciado es indiferente a nivel de los resultados de resolución, en contra de lo que se había venido afirmando. Sin embargo, en lo que se refiere al suceso o acción que presenta el enunciado, los alumnos tienen menos dificultad cuando las acciones del relato se encuentran ordenadas temporalmente.

Si al final del Primer Ciclo de Educación Primaria los alumnos dominan, sin gran dificultad, los algoritmos de adición y sustracción, en tanto que continúan durante mucho tiempo después teniendo dificultades en la resolución de problemas aritméticos sencillos, habría que pensar, seriamente, en hacer una didáctica de los problemas que tuviera en cuenta aspectos menos matemáticos, como los semánticos o los psicológicos, que a continuación abordaremos y de los que venimos hablando. En particular, debería existir todo un entrenamiento en la traducción semántico-matemática.

9. Factores de comprensión de los enunciados

En la comprensión de un enunciado, los alumnos ponen en juego diferentes tipos de representaciones cognitivas entre las que establecen correspondencias: de tipo lingüístico, icónico, y ligadas al escrito matemático y su correspondencia oral.

Como ya hemos dicho, la comprensión de un enunciado depende de muchos factores[13], algunos de los cuales acabamos de analizar, y a los que vamos a añadir los que siguen:

– *Los conocimientos pragmáticos de los alumnos.*

Muchos enunciados se encuentran ligados a las prácticas corrientes de resolución de problemas en la clase, provienen en su mayoría de manuales escolares que siguen una tradición, tanto en cuanto a temas como a redacción. La familiaridad

[13] Véase DESCAVES, A. (1992): *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes*, París, Hachette.

del alumno con tales enunciados, lo que sabe que tiene que hacer habitualmente, el papel que cumplen los datos numéricos, etc., influye en su comprensión del enunciado. Recuérdese el contrato didáctico clásico de la resolución de problemas que actúa en la muy conocida «edad del capitán».[14]

– *Los conocimientos del mundo.*

Cuando se desconoce el funcionamiento de la bolsa, es prácticamente imposible resolver un problema que trate sobre ella, por mucho que sólo comporte una sencilla sustracción; faltan conocimientos sobre ese mundo. Inversamente, la resolución de ciertos problemas requiere el distanciamiento de los conocimientos que tenemos sobre situaciones familiares demasiado concretas.

– *Las competencias lingüísticas.*

Tienen que ver con cuatro niveles de análisis: nivel pragmático (interpretar lo que ha querido decir el autor del enunciado); nivel de la representación semántica, de la que ya hemos hablado; nivel morfosintáctico (estructura de las frases, tiempos verbales, etc.); nivel gráfico (disposición del enunciado, presencia de esquemas, tablas, figuras, dibujos, etc.).

– *Las capacidades perceptivas.*

Están relacionadas, sobre todo, con la exploración visual y la discriminación perceptiva.

– *La capacidad de representarse el problema*, fundamentalmente a través de un escrito matemático, y poner en marcha procedimientos de verificación y control que permitan completar o modificar las significaciones extraídas del texto.

– *Las competencias lógicas.*

La comprensión de los sistemas de reglas condiciona la estrategia de resolución. Las interferencias entre pensamiento natural y lógica formal son constantes. Se sabe, y Wermus[15] lo ha puesto de manifiesto en sus trabajos, que la lógica espontánea de los niños y la lógica de predicados no funcionan de la misma forma, y que las operaciones de conjunción y disyunción de atributos son sustituidos por amalgamas de predicados que funcionan de manera distinta.

10. Variables didácticas de los enunciados

Siguiendo a Teule-Sensacq y Vinrich[16], vamos a distinguir distintas variables didácticas que confluyen en el enunciado de un problema, y que van por tanto a determinar tanto distintas estrategias de resolución como un diferente

[14] Esta experiencia fue descrita en el capítulo 3.

[15] WERMUS, H. (1976): «Essai de répresentation de certaines activités cognitives à l'aide des prédicats avec composantes contextuelles», en *Archives de Psychologie*, vol XLIV, nº 171, Genève, pp. 205-221.

[16] TEULE-SENSACQ, P. y VINRICH, G. (1992): *Lire et comprendre des énoncés de problèmes,* Bordeaux, LADIST.

tratamiento didáctico. Las variables didácticas van a permitir organizar, según parámetros fijos, diferentes tipos de actividad.

- *El soporte*. Hay cuatro tipos de soporte clásicos: una tabla, un gráfico, una imagen y un enunciado narrado a través de un texto escrito.

Uno de los objetivos de la resolución de problemas es, justamente, que el alumno sepa pasar de un tipo de representación a otro, y que sepa utilizar las diferentes organizaciones del problema.

- *El contexto*. Si se toman como referencia las prácticas sociales de los niños, éstos pueden enfrentarse a: *contextos efectivos*, donde la situación descrita permite una acción o una representación concreta; *contextos descritos* por el maestro, es decir, evocaciones de prácticas sociales de referencia para el alumno; o *simulación* de prácticas sociales que no pertenecen al entorno familiar del alumno.

- Pueden distinguirse, también, las situaciones que conducen al alumno al reconocimiento de la *coherencia de un enunciado;* en ellas, el alumno debe encontrar datos, organizarlos, etc. Estas situaciones presentan enunciados mezclados, o bien situaciones que tienen como objetivo que el alumno produzca, a partir de un gráfico o una imagen, un enunciado coherente.

- *Las informaciones*. Además del soporte, cabe considerar si las informaciones suministradas son textuales, lógicas o numéricas.

En este nivel se sitúan las actividades que deben llevar a los alumnos a preguntarse sobre la pertinencia de las informaciones en relación con la solución del problema propuesto.

- *Las preguntas*. Constituyen el desafío de la actividad. Según la naturaleza del procedimiento de respuesta, pueden considerarse varios tipos de preguntas: la respuesta se obtiene por simple lectura del enunciado o por verificación de una información presente, explícitamente, en el texto; la respuesta se obtiene reflexionando, sin calcular; la respuesta se obtiene calculando; la respuesta es imposible por falta de informaciones en el enunciado.

- *El programa de cálculo*. El alumno puede encontrarse frente a tres tipos de situaciones: aquellas en las que es necesario realizar un cálculo para la búsqueda del resultado; aquellas en las que hay que elaborar un programa de cálculo o construcción (caso de más de una operación aritmética o de una construcción geométrica), lo que supone una verdadera anticipación de la obtención de la solución; y, finalmente, aquellas en las que

Actividad 5: Redacte tres enunciados de problemas que se correspondan con cada una de las situaciones que acaban de ser descritas.

el alumno debe manifestarse sobre las solución, ya elaborada, encontrada por otro.

– *La respuesta*. La recontextualización del resultado de un problema numérico, o la identificación de la unidad en la que debe expresarse la solución, en el caso de los problemas que usan medidas, constituye uno de los desafíos más importantes de la resolución de problemas.

– *La comunicación de resultados*. Puede ser escrita u oral. Destinada a otro alumno, a un grupo de alumnos, al profesor, etc.

– *La prueba de la validez del resultado*. Puede diferenciarse entre situaciones en las que la prueba se apoya sobre algo material (por ejemplo, una medida que puede ser verificada), o sobre una acción (probar que dos figuras tienen la misma cantidad de superficie), o aquellas que requieren de una prueba formal.

El análisis, para cada enunciado concreto, de las variables didácticas citadas es un excelente ejercicio que permite al profesor analizar los conocimientos que el niño pone en marcha en la resolución de ese problema, así como ajustar el nivel de dificultad a las características de los alumnos, haciendo una resolución graduada de problemas. A este análisis deben unírsele otros, relativos tanto a los aspectos semánticos como a otros de cariz más matemáticos, tales como el tipo de problema y sentencia.

D'Amore relata los resultados de una experiencia llevada a cabo en Bologna, en la que a partir de un texto clásico de un problema, permitiendo a los niños discutir entre ellos y hacer todo tipo de preguntas a los investigadores sobre el texto, éste iba siendo retocado con las observaciones hechas por los niños. Este nuevo texto era propuesto en otra clase paralela, que disponía de las mismas condiciones de trabajo que la clase anterior. Pues bien, los resultados obtenidos no ofrecen lugar a duda: «Si el texto había sido confeccionado en la forma *adulta* clásica, gran parte de la atención y de la discusión la acaparaba el texto. Si el texto había sido confeccionado del modo descrito más arriba, no había casi discusión sobre el texto y la atención, se centraba casi toda en la resolución, signo de que el texto, tal como estaba, no creaba problemas».[17]

Las investigaciones que hemos ido sintetizando permiten al profesor graduar la actividad de resolución de problemas y adaptarla a las características y nivel de los alumnos, a la vez que le proporcionan elementos de reflexión para evaluar los procedimientos usados por los alumnos y los errores y dificultades previsibles, permitiendo un análisis a priori de calidad. Pero con todo, no es suficiente, falta un aspecto importante sobre el que vamos a interrogarnos a continuación: ¿existe una didáctica de los problemas que proporcione un plan de acción?

[17] D'AMORE, B. (1997): *Problemas,* Madrid: Síntesis, p. 103.

11. Hacia una didáctica de la resolución de problemas

Hemos encontrado algunas respuestas parciales a esa pregunta en los trabajos de Descaves[18], y algunas de sus recomendaciones son las que recogemos a continuación.

Para facilitar el aprendizaje, deben utilizarse sistemas materiales de representación que permitan el paso de la representación del problema a la de la solución. Estos sistemas de representación, que pueden considerarse como instrumentos psicológicos, en el sentido de Vygotski, comportan:

- Representaciones icónicas (esquemas).
- Representaciones simbólicas ligadas a ciertas disposiciones espaciales.
- Escritos específicamente matemáticos.
- La lengua natural.

También en los trabajos sucesivos del equipo ERMEL[19] del INRP se encuentran valiosas recomendaciones sobre el tipo de problemas a presentar a los alumnos, pronunciándose por una variedad de enunciados y tareas del siguiente estilo:

- Dada una situación, vivida o verbalizada, determinar los diferentes tipos de preguntas que pueden hacerse.
- Dada una pregunta, buscar datos e informaciones pertinentes que permitan responderla.
- Analizar en situaciones o enunciados dados, la pertinencia, verosimilitud, coherencia, redundancia, etc. de los datos dados.
- Resolver problemas cuyo enunciado viene dado a través de un gráfico, tabla, dibujo, foto, etc.
- Dada una situación, un pregunta y un resultado obtenido como respuesta, interpretarlo, validarlo y comunicarlo.

Proponer tanto problemas complejos, cuya resolución comporte varias etapas que se resuelvan con un modelo conocido por el alumno, no precisadas en las preguntas intermedias, como problemas abiertos para los que el alumno no tiene aún un modelo de resolución. Estos problemas servirán para desarrollar estrategias de búsqueda.

[18] DESCAVES, A. (1992): *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes,* París, Hachette.

[19] ERMEL (1978): *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Cycle élémentaire,* Tome 1, París, OCDL.

ERMEL (1993): Apprentissages numériques. CE1, París, Hatier.

12. Situaciones varias para una didáctica de la proposición y resolución de problemas

En este punto vamos a proponer una serie de problemas en los que se tratará de ilustrar la didáctica que propugnamos para la proposición y resolución de problemas. Esa didáctica se basa en los principios teóricos expuestos en los puntos anteriores y, en cada problema propuesto, se analizará algún aspecto de los vistos en ese marco teórico sin que ello sea óbice para que se pudieran analizar o estudiar otros aspectos.

12.1. El análisis y la gestión de los datos

Problema propuesto: Las fotos

«En una excursión Pedro ha utilizado 3 carretes de 24 fotos cada uno. 4 fotos salieron movidas. Utilizó después, 2 nuevos carretes de 12 fotos cada uno; esta vez no le salieron dos fotos.

Piensa transformar las cuatro mejores fotos de cada carrete en diapositivas y hacer un montaje con las 20 diapositivas resultantes.

Normalmente pega las fotos en un álbum de 10 páginas; en cada página no puede pegar más de 6 fotos. ¿Podrá pegar todas sus fotos en el álbum?»

Tarea didáctica: *reelaborarlo con los alumnos*

La reelaboración debería centrarse principalmente en:

– La eliminación de datos no pertinentes.

Evidentemente hay datos no pertinentes para la resolución (excursión, nombre del niño) que sin embargo contribuyen a situar al alumno ante una situación evocada y que serán difícilmente eliminados en una reelaboración. Incluso aparecerán otros datos accesorios y descriptivos como se describe en la experiencia de D'Amore que aparece en el punto 9.

Por otra parte, es también evidente que el párrafo central sobre las diapositivas es totalmente irrelevante para la resolución del problema y, por tanto, es bastante predecible la eliminación de los datos numéricos (4 y 20) que aparecen en el mismo.

– Hacer explícitos los posibles datos implícitos.

Aparece implícito en el problema el que en cada página se pueden pegar 1, 2, …, 6 fotos y es posible que en una reformulación los alumnos lo hagan explícito indicando pormenorizadamente todas las posibilidades de distribución numérica de las fotos en cada página.

Seguramente se hará explícito el hecho de que las fotos inservibles no se pegan en el álbum.

– La posible reestructuración de datos numéricos, para dar menos datos, sin cambiar sustancialmente el problema o su resultado.

Aquí la previsible actuación del alumno, y a ello debería guiarlo el maestro, se debería centrar en la posible consideración de un solo tipo de carretes (de 24 fotos), con la consiguiente reconsideración del número total de fotos inservibles. Ello no desvirtúa el objetivo principal del problema (uso de las operaciones de multiplicación y sustracción), objetivo por el que debería velar el maestro ante previsibles reformulaciones que implicasen una rebaja del mismo (eliminando o rebajando de magnitud los números que aparecen).

– Generación de operadores semánticos, aparte de los ya dados.

Si concebimos los operadores semánticos como muletillas que, en opinión del alumno, le ayudan a resolver el problema, es previsible que en una reformulación aparezcan otros operadores semánticos que no siempre constituirán esa ayuda a la resolución como se veía en el punto 7.

Así sería posible que aparecieran operadores semánticos nuevos relativos a las fotos desechables como: tirar, desechar, romper, etc. para referirse a las fotos que *han salido movidas* en los tres primeros carretes o que *no han salido* en los otros dos. Todos ellos serían operadores semánticos directos ya que inducirían a la operación resta que es la que se asocia a los mismos.

– Reelaboración de la pregunta.

Es muy posible que la pregunta sea reelaborada ya que está redactada de una forma muy general sin aludir explícitamente al hecho numérico y es posible que surjan, entonces, términos como «cabrán», «entrarán», «habrá suficientes páginas», etc.

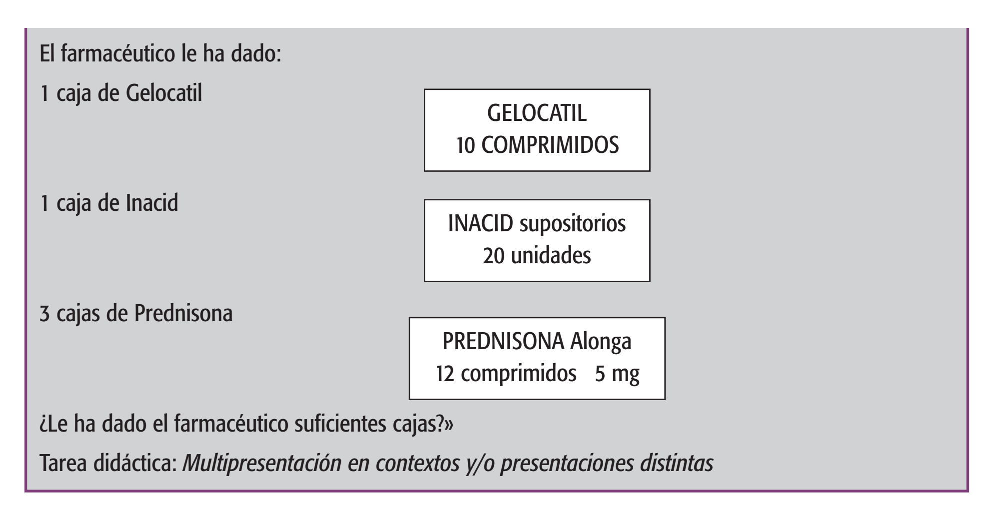
Actividad 6: Redactar el enunciado de un problema que contenga datos pertinentes, datos no pertinentes, datos implícitos, datos explícitos, operadores semánticos directos e inversos. Transformarlo, eliminando, o cambiando los datos u operadores necesarios, para que resulte un enunciado más conciso.

12.2. El análisis y gestión del soporte y de la representación

Problema propuesto: El farmacéutico

«El reumatólogo entrega a una señora la siguiente receta:

Dr. Juan López Hurtado — 25 de abril de 2002
Reumatólogo — Sra. Luisa González Hernández
Consulta diaria de 5 a 7
1) Gelocatil cápsulas: 2 comprimidos diarios durante 7 días.
2) Inacid de 125 mg en supositorios: 1 al acostarse durante 7 días.
3) Prednisona 20 mg: 1 pastilla en el desayuno, 1 comida y 1 cena, durante 15 días.



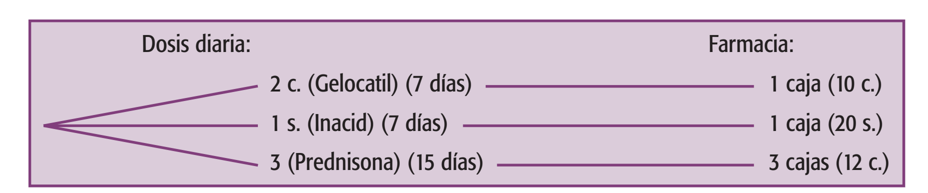
a) Cambio de contexto

No sería muy difícil la proposición de un problema paralelo en que el contexto se cambiase de forma, que el pedido lo realizase, por ejemplo, el maestro y el suministrador fuera, por ejemplo, una papelería, incluyendo siempre una serie de datos no pertinentes que deberían aparecer tanto en el pedido del maestro como en la nota de entrega del suministrador.

b) Cambio de presentación formal (manipulativa, icónica, gráfica, simbólica)

El maestro puede gestionar una variable didáctica importante como es la forma de presentación que elige para presentar el problema a sus alumnos, teniendo para ello en cuenta: la edad de los alumnos a los que se propone el problema y su nivel de conocimiento sobre los conceptos que sirven para resolverlo. Así, en este caso, podría proporcionar:

- Un material manipulativo (como cajitas y fichas o peones para simular los comprimidos o los supositorios), si se trata de alumnos pequeños y con un manejo primario de las operaciones a realizar para resolverlo.
- Una representación icónica muy fácilmente deducible a partir del enunciado del problema, si se trata de alumnos en condiciones muy parecidas a los anteriores.
- Una representación gráfica, por ejemplo, a través de un diagrama en árbol, para describir las distintas prescripciones de los distintos medicamentos y las diferentes presentaciones de los mismos, tratándose de alumnos con mayor edad y mayor nivel de lectura de datos. La representación podría ser:



– Una representación simbólica, por último, para alumnos cuyo nivel de edad y de dominio de las operaciones básicas convierte en superfluas las representaciones anteriores.

Teniendo en cuenta el nivel de desarrollo próximo[20], se podría someter a los alumnos de un mismo nivel a esos cambios sucesivos de representación con la consiguiente mejora que supondría para ellos la consideración de distintas formas de representación de un mismo problema.

Actividad 7: Proponer dos tipos de representación del siguiente problema: «El profesor de gimnasia del colegio va a organizar un torneo de baloncesto entre 5 equipos de 4º, 4 de 3º y 6 de 5º. Cada equipo se enfrentará una vez a todos los equipos de su mismo nivel.

El colegio dispone de dos campos de baloncesto. Se establece un tiempo de 25 minutos para cada partido (2 tiempos de 10 min. Y el descanso de 5 min).

¿Por cuánto tiempo debe (el profesor de gimnasia) reservar los campos para que se pueda desarrollar el torneo completo?»

12.3. El análisis y gestión de las soluciones

a) Selección de la solución correcta entre varias dadas

Problema propuesto: LA RECETA

Ingredientes de la receta de plátanos al horno para 4 personas:

- 32 g de mantequilla
- 8 plátanos maduros
- 16 g de azúcar

¿Cuántos g de mantequilla y cuántos plátanos se necesitarán si utilizásemos 12 g de azúcar? ¿Para cuántas personas sería la receta?

¿Cuál es la solución correcta?

Solución 1:	Solución 2:	Solución 3:
12/16= 3/4 32 – 3/4 = 24 24 g de mantequilla 8 × 3/4= 6 6 plátanos 4 × 3/4 = 3 3 personas	16 – 12 = 4 4 g de azúcar 8 – 4 = 4 4 plátanos 32 – 4 =28 28 g de mantequilla 4 – 4=0 0 personas	16 × 2 = 32 12 × 2=24 24 g de mantequilla 8 × 2 =16 16 plátanos 4 × 2 = 8 personas

Tarea didáctica: *Gestión de la selección y razonamiento de la solución correcta*

[20] VYGOTSKI, L. S. (1979): *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, Barcelona: Grijalbo.

1) Control de los datos que aparecen en cada solución

En este caso habría que controlar a qué se refieren los datos que aparecen en cada una de las soluciones, y así se puede observar que, en todas ellas, aparte de las cantidades indicadas de cada ingrediente, aparecen todos los ingredientes y el número de personas para las que sería suficiente la receta y, por tanto, desde este punto de vista cualquiera de las soluciones podría ser válida.

2) Control de cada uno de los procedimientos de resolución que aparecen en las soluciones

El control de los procedimientos de resolución se podría realizar de varias formas:

a) Considerando aquellos que dan soluciones absurdas. Así ocurre con el procedimiento sustractivo que se usa en la solución 2, que proporciona 12 g de azúcar, no serviría para ninguna persona. También se podría analizar desde este punto de vista el procedimiento multiplicativo de la solución 3, en la que empleando 12 g de azúcar sale una receta para un número doble de personas, que las de una receta que emplease 16 g. Ambos procedimientos se podrían invalidar, entonces, por lo absurdo de ciertos valores de las soluciones correspondientes.

b) Considerando las soluciones en términos de comparación, 12 g es un poco menor que 16 g con lo cual las otras cantidades o números deben ser un poco menores que las correspondientes dadas y, por ello, en la segunda solución no es posible que el número de plátanos disminuya hasta la mitad y el número de personas se reduzca a 0, mientras la mantequilla apenas varía; y en la tercera que se mantenga el número de gramos de mantequilla mientras aumenta el número de plátanos y de personas hasta el doble. Tales diferencias hacen que, desde este prisma, el procedimiento de resolución más adecuado sea el primero, donde las cantidades disminuyen de una forma razonable respecto a lo que había disminuido el azúcar.

c) Considerando la lógica matemática de cada uno de ellos; conectándolos entonces al verdadero sentido del tipo de problemas al que pertenece el dado. Muy poco tendría que ser el bagaje cultural de los resolutores para que no conectasen este problema al sentido de proporcionalidad, lo que daría como consecuencia el rechazo de las soluciones segunda y tercera.

3) Institucionalización del procedimiento de resolución

En este tipo de problemas conviene realizar, una vez encontrada la solución correcta, la institucionalización del procedimiento de resolución, procedimiento que entrará así a formar parte del conocimiento matemático del alumno. En este caso se debería concretar en:

– Hallar una primera proporción entre dos cantidades o números correspondientes a nivel de significación.

– Aplicar esa misma proporción a las demás cantidades o números que intervienen.

b) Enunciar el problema correspondiente a una solución dada

Problema propuesto: LOS ELEFANTES

Inventar un problema con la solución siguiente:

$2 \times (18 - 7)$: 2 elefantes

Tarea didáctica: *Gestión de la construcción del enunciado de un problema cuya solución indicada sea la dada*

1) Búsqueda de un contexto que dé sentido a la solución propuesta

Habría que pensar que, en este caso, los alumnos buscarán contextos donde tuviesen cabida los elefantes que aparecen en la solución, y por tanto, es bastante previsible que redacten el enunciado situando la acción en un zoo, en un circo, en una selva…

2) ¿Es necesario seguir el orden en que aparecen las operaciones, para construir el enunciado?

Al enfrentarse a problemas de este tipo es fundamental plantearse esta pregunta y, dada la prelación de unas operaciones sobre otras, parece obligado no respetar siempre el orden en que vienen indicadas las operaciones. Como muestra vemos algunos enunciados elaborados por alumnos de 5º de Primaria y de 2º de Magisterio de Educación Primaria.

3) Construcción del enunciado, con control paralelo de las operaciones que implica

La construcción del texto del enunciado obliga a prever las operaciones que implica cada una de las frases componentes y de los operadores semánticos incluidos en ellas, es decir, parece imposible redactar el enunciado correspondiente a la solución dada sin ir construyendo la misma paralelamente a la construcción del enunciado, controlando, aunque sea implícitamente, la adecuación entre el texto parcial construido y la operación parcial correspondiente.

Actividad 8: Proponer un problema, a partir de una solución indicada que contenga las cuatro operaciones elementales especificando para ella un contexto dado.

c) Localizar, entre varios, el problema al que corresponde una solución dada

Problema propuesto: ¿A QUÉ PROBLEMA PERTENECE UNA SOLUCIÓN DADA MEDIANTE UN CÁLCULO?

¿En cuál de los 4 problemas hay que hacer el cálculo 32-7-15 para hallar la solución?

Problema 1: En un tablero de juego hay 32 casillas. Un jugador se halla en la casilla 15 y el otro en la casilla 7. ¿Cuántas casillas del tablero están sin ocupar?

Problema 2: En un tablero de juego hay 32 casillas. Hay peones desde la casilla 7 hasta la 15. ¿Cuántas casillas hay libres?

Problema 3: He comprado 32 huevos en el supermercado. Me he caído y se me han roto 7. En la nevera tenía todavía 15 huevos. ¿Cuántos huevos tengo?

Problema 4: En un armario viejo de mis abuelos, he encontrado 32 cajas de sombreros. De éstas, 15 contenían sombreros de hombre y 7 estaban vacías. El resto contenía sombreros de mujer. ¿Cuántos sombreros hay de mujer?

Tarea didáctica: *Orientaciones para la asignación del cálculo al problema correspondiente*

1) Control de los datos que intervienen en el cálculo

Parece evidente que en un problema como éste el primer paso será comprobar si los datos que aparecen en el cálculo tienen sus correspondientes en cada uno de los problemas dados, lo que es bastante evidente en este caso, a partir de la simple lectura de los enunciados correspondientes.

2) Control de las operaciones que intervienen en el cálculo

Aquí será fundamental analizar los operadores semánticos que intervienen en cada uno de los problemas dados y, en base a ellos, la aplicación de las operaciones correspondientes, estableciendo comparaciones simultáneas con la solución propuesta.

d) La construcción de preguntas a partir de un enunciado

Problema propuesto: EL CAMIÓN

Un camión hace 12 viajes de ida y vuelta entre la obra y el almacén de materiales de construcción. La obra está a 7 km del almacén. Cada viaje de ida y vuelta cuesta 85 euros. La carga de cada viaje es de 1 540 kg.

Haz preguntas a partir de este enunciado para que otro compañero dé las respuestas.

Tarea didáctica: *Prever los diversos tipos de preguntas que puede proponer el alumno*

Ante este tipo de problemas se puede esperar que el alumno proponga 3 tipos de preguntas:

1) Preguntas sin respuesta, porque no hay suficientes datos o porque no tienen nada que ver con el contexto del problema. Entre las primeras cabría, por ejemplo, una del tipo: ¿cuál es más largo, el viaje de ida o el de vuelta? Y, entre las segundas: ¿qué edad tiene el conductor del camión?

2) Preguntas ya respondidas en el texto del enunciado. Por ejemplo, ¿cuántos kilos transporta el camión en cada viaje?

3) Preguntas que exigen elaborar un procedimiento de resolución a partir de los datos que aporta el problema. Por ejemplo, una pregunta posible sería: ¿cuántos km recorre ese camión para realizar todos los viajes?

No hace falta decir que la acción didáctica del profesor se debe orientar fundamentalmente hacia la producción de preguntas de este último tipo, es decir, que se deberían ir eliminando progresivamente aquellas preguntas redundantes por evidentes o absurdas respecto al texto que describe el enunciado.

12.4. El análisis y gestión de los tipos de resolución

Problema propuesto: CAMBIO DE CROMOS

En un kiosco hay el siguiente anuncio:

> **Kiosco JUANI**
>
> Cambio de cromos:
>
> 4 tazos por cada 3 cromos de futbolistas
>
> 5 cromos de futbolistas por cada 2 cromos de Pokemon

Rafa llega al kiosco para cambiar 120 pokemon, que tiene repetidos por tazos ¿Cuántos tazos conseguirá?

Tarea didáctica: *Resolución manipulativa, gráfica y simbólica*

1) Establecimiento de condiciones para hacer posible la resolución manipulativa

El maestro tendrá que diseñar el escenario que haga posible la resolución manipulativa y, para ello, tendrá que asignar, por ejemplo, los papeles de kiosquero y de cambiador de cromos, disponiendo ambos del material adecuado para hacer posible la ejecución de los cambios impuestos, es decir, tendrá que escenificar la situación para que sea la resolución manipulativa la que dé lugar a la búsqueda de la solución.

2) Intervención sobre la variable *tipo de material* para posibilitar una resolución de tipo gráfico

No se puede esperar que el paso de la resolución de tipo manipulativo a la de tipo gráfico se produzca de forma espontánea, es preciso establecer

las condiciones para que ello se produzca y esas condiciones vendrán dadas, por ejemplo, al gestionar el maestro una variable didáctica como es la del *tipo de material que se pone a disposición del alumno* y, en este caso, eso se puede concretar, por ejemplo, en disminuir la cantidad de tazos, futbolistas y pokemones a disposición de los alumnos, de modo que se haga imposible el cambio de forma manipulativa. El estado extremo de gestión de esta variable sería darles sólo una unidad de cada tipo de cromo, lo que evitaría, desde el principio, los intentos de aplicar una resolución manipulativa.

3) Acción que condiciona el paso a la resolución simbólica de forma determinante

   Evidentemente el paso a la resolución de tipo simbólico se tendría que producir en ausencia de material manipulable (actuación límite sobre la variable didáctica citada en el punto anterior), y por tanto, el maestro, una vez practicados los otros dos tipos de resolución, tendría que retirar todo el material para que los alumnos procediesen, con bolígrafo y papel, a la resolución del enunciado dado.

4) Recomendación de tipo didáctico para ver la procedencia de los distintos tipos de resolución

   El paso de un tipo de resolución a otro podría no estar justificado para el alumno, si se sigue el itinerario que se ha descrito en los puntos indicados con anterioridad, por lo que creemos que una buena actuación didáctica consistiría en dividir la clase en grupos y encargar a cada grupo la resolución, gestionando la variable didáctica citada en pasos anteriores, para que grupos distintos emprendiesen distintos tipos de resolución. Ello haría obligatoria una puesta en común en la que se viesen los distintos modos de llegar a la solución.

No puede dejarse de mencionar la posibilidad de aplicación de estos tres modos de resolución de acuerdo con la edad y el nivel de los alumnos que se tienen delante. La resolución manipulativa sería adecuada para alumnos de los primeros cursos de Primaria, mientras que los de los últimos cursos la podrían considerar una pérdida de tiempo y pasar directamente a la simbólica, por disponer de los instrumentos adecuados para poder practicarla.

12.5. El análisis y gestión de las variables didácticas

En cada uno de los apartados anteriores se han tenido en cuenta las diferentes variables didácticas cuya gestión recomendaban Teule-Sensacq y Vinrich: el soporte, el contexto, las informaciones, etc. (vistas en el apartado 10). Debemos insistir en la importancia que revisten los cambios de valor de cada una de esas variables didácticas si queremos que el alumno comprenda las múltiples facetas que puede revestir la resolución de problemas.

12.6. La concepción del problema como una situación problemática

La máxima expresión de la gestión de las variables didácticas la proporcionará el paso de los problemas simples que se resuelven con un corto procedimiento de cálculo a problemas más complicados donde se trata de analizar tablas de datos, de gestionar los múltiples datos de un problema complejo, de elaborar conceptos a través de un tipo determinado de problemas, etc. Tal tipo de problemas constituyen las que denominamos situaciones problemáticas.

Problema propuesto: LA PASTELERÍA INDUSTRIAL

Una pastelería industrial fabrica 8 000 donuts cada día. Tiene que pedir la harina, los huevos y el azúcar que necesita para fabricarlos durante un mes.

Para hacer un donut hacen falta 150 g de harina, 2 huevos y 5 terrones de azúcar.

La harina la traen en un camión que transporta 80 sacos y cada saco pesa 80 kilos. Los huevos los traen en camionetas que tienen 12 estantes y en cada estante caben 1 000 huevos. El azúcar lo transportan en cajas que colocan en una furgoneta que puede transportar de 20 a 30 cajas y en cada caja caben 10 000 azucarillos.

¿Cuántos sacos de harina, cuántos estantes de huevos y cuántas cajas de azucarillos hay que pedir para elaborar los donuts de un mes? ¿Cuántos camiones, camionetas y furgonetas se necesitan para transportar esas cantidades de cada uno de los productos?

Tarea didáctica: *Elaboración de una lista de tareas previas que ayuden al planteamiento y la resolución*

1) Ayudas para la lectura del enunciado

Ante una situación problemática lo primero que hay que asegurar es la comprensión del enunciado por parte del alumno y esto se puede hacer proponiendo una serie de ayudas en forma de preguntas, para no interferir en la resolución de la situación problemática desde la posición de autoridad que representa el maestro. Algunas de esas preguntas pueden ser:

Di qué se necesita para fabricar un donut

¿Cuántos donuts fabrica al día esa pastelería?

¿Cuántos huevos se transportan en cada viaje?

¿Cuántos kilos de harina trae cada camión?

¿Cuántas cajas de azúcar se necesitan para embalar 20 000 azucarillos?

Es decir, se trata de preguntas que inciden directa o indirectamente sobre las informaciones que proporciona el enunciado.

2) Ayudas de tipo gráfico

Con el ánimo constante de no interferir en la resolución del alumno, se podrían sugerir ayudas de tipo gráfico como: ¿puedes representar el

estante de 1 000 huevos mediante un rectángulo de 1 000 casillas? Dibuja un paralelepípedo que represente a una caja de 10 000 azucarillos. Dibuja las bolsitas de 150 g de harina que se necesitan para completar 9 kg de azúcar, etc.

3) Cálculo previo de preparación para los cálculos que exige la resolución

Se trata de que los alumnos practiquen un cálculo de entrenamiento para poder emprender los diferentes cálculos que implica la resolución de la situación problemática. Alguno de esos cálculos podría ser: ¿por qué número hay que multiplicar 15 g para llegar a 1 kg? ¿12×10? ¿1 000:5? ¿80×80?… Todos ellos pueden proporcionar una ayuda para realizar los cálculos implicados en la resolución.

4) Propuesta de elementos de registro de datos (tablas organizadoras)

Una ayuda importante la pueden constituir los diferentes medios de registro de datos que se proporcione al alumno. Por ejemplo una tabla como la siguiente:

	Camión	Camioneta	Furgoneta
Nº de unidades básicas de almacenamiento (sacos, estantes o cajas)			
Nº de unidades básicas de medida (kg, nº de huevos, nº de azucarillos)			
Nº de unidades básicas de almacenamiento que se necesitan para fabricar los donuts de un mes			
Nº de medios de transporte que se necesitan para transportar esas unidades básicas de almacenamiento			

Esta tabla u otras parecidas pueden constituir un elemento organizativo importante para la resolución de la situación problemática y, a la vez, la sugerencia de un instrumento metodológico para ayudar a la resolución de determinados problemas o situaciones problemáticas.

Actividad 9: Proponer otro medio de registro de datos para el problema dado en este apartado.

BIBLIOGRAFÍA

BRANSFORD, J. y STEIN, B. (1986): *Solución IDEAL de problemas*, Barcelona, Labor.

D'AMORE, B. (1997): *Problemas*, Madrid: Síntesis, 103.

DESCAVES, A. (1992): *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes*, París: Hachette.

EHRLICH, S. (1990): *Sémantique et mathématiques*, París: Nathan.

POLYA, G. (1982): *Cómo plantear y resolver problemas*, México: Trillas.

CAPÍTULO 11

Didáctica de la Geometría en la Educación Primaria

ÍNDICE

Francisco Vecino Rubio

1. Introducción

Los intentos emprendidos por diversos colectivos institucionales para mejorar la enseñanza de la geometría, de forma que se recuperase del olvido intencional al que la comunidad didáctica la había relegado en la década de los sesenta, no parecen haber dado los resultados didácticos apetecidos. Se está produciendo un estancamiento que se hace evidente tanto en las concepciones que los alumnos se forman de esta materia como en el dominio, cada vez más grande, que ejerce el campo numérico (la aritmética) no sólo sobre la geometría sino también sobre otras ramas de la matemática al nivel elemental.

Se detectan así, en cualquier nivel de enseñanza, las siguientes carencias:

1) Ausencia de generalización que, si bien puede ser explicable en los primeros niveles de la Enseñanza Primaria, no debe resultar admisible en niveles posteriores de la enseñanza.

2) Desaparición de métodos de razonamiento propios de esta rama de las matemáticas como puede ser el deductivo, aplicado tradicionalmente, o el inductivo que se puede instaurar desde concepciones didácticas mucho más recientes.

3) Predominio prácticamente total de la geometría métrica que genera una cláusula implícita del contrato didáctico como es la siguiente: *en geometría se hallan áreas de figuras en el plano y volúmenes de cuerpos en el espacio* y, en consecuencia, se instaura un lenguaje geométrico que resulta un híbrido entre la geometría y la medida.

4) Olvido de otros tipos de geometría (proyectiva o topológica) que sustentan la construcción del espacio previa a la sistematización geométrica propia del ciclo final de la Enseñanza Primaria y de toda la Secundaria.

6) Inexistencia de clasificaciones al nivel de las figuras elementales que creará un estado de inseguridad a la hora de establecer relaciones intrafigurales entre los elementos geométricos e incluso transfigurales al nivel de consideración de estructuras más globales.

7) Aritmetización de la geometría al limitarse muchas veces la enseñanza-aprendizaje de la misma a un cálculo inconsciente sobre fórmulas justificadoras de todo el entramado geométrico elemental.

8) Generación de un lenguaje pseudo-científico en el que se mezclan, como en una batidora, los términos geométricos más elementales dando lugar a una jerga en que se pierde absolutamente el sentido geométrico de cualquier palabra o expresión que se utiliza para describir, para simbolizar, para designar cualquier figura, cualquier cuerpo, cualquier teorema o cualquier propiedad de la geometría elemental.

1.1. Posibles causas de esta situación

La constatación de tales carencias obliga a preguntarse por las posibles causas que las originan. Para ello acudiremos a diversos elementos componentes del sistema educativo.

1. El Diseño Curricular Base, en la parte correspondiente a la geometría, adolece de indeterminación casi siempre y, en ciertas ocasiones, de falta de rigor en el planteamiento o estructuración de los conceptos geométricos que establece para Educación Primaria, contribuyendo a la confusión lingüística y conceptual denunciada.
2. Los manuales escolares, en cuya redacción intervienen esas orientaciones oficiales y otras orientaciones de tipo comercial o estratégico, imponen una concepción de la geometría en la que se ha operado una transposición didáctica claramente reduccionista y generadora de efectos ligados al contrato didáctico. Organizan además un discurso geométrico totalmente desligado de una construcción anterior o paralela del espacio sobre el que se debe organizar cualquier tipo de geometría produciendo, en consecuencia, una geometría que no se encuentra sostenida por una base espacial suficientemente sólida.
3. La adopción del libro de texto como elemento determinante del currículo, determina, en la mayoría de las ocasiones, un agravamiento de la visión simplista propuesta de antemano, con la consiguiente generación, en el alumno, de cláusulas implícitas del contrato didáctico que el maestro no habría imaginado jamás que llegaran a generarse.
4. La ausencia, carencial o intencionada, de materiales didácticos específicos para la construcción de los conceptos geométricos se convierte en una fuente inagotable de obstáculos didácticos que convierten el aprendizaje de esta materia en algo falto de consistencia y rigor.
5. El cambio brusco que se produce respecto a la introducción del espacio que se hace en Educación Infantil, sea por la imprevisión de una continuidad en las orientaciones oficiales sea por la proposición curricular de las editoriales, hace que la enseñanza-aprendizaje de la geometría adolezca de esa base fuerte para la geometría que debe constituir una buena construcción previa del espacio.

Podríamos buscar otras causas, pero creemos que las mencionadas anteriormente constituyen una explicación bastante plausible de las carencias a las que aludíamos al principio.

2. Objetivos

– Conocer los principios psicológicos sobre la percepción y la representación espacial. Adaptar el currículo y desarrollarlo conforme a tales principios.

- Conocer e integrar los principales materiales didácticos en el desarrollo de las situaciones didácticas de introducción a la percepción y representación espaciales.

- Determinar y considerar, a efectos didácticos de diseño de situaciones, las influencias que puede ejercer, en el niño, la talla del espacio en el que se le sitúe.

- Diseñar y desarrollar el currículo referente a la organización espacial y a la geometría asociada, completando y organizando las orientaciones oficiales correspondientes.

- Proponer y diseñar situaciones que pretendan un desarrollo amplio de la localización espacial, atendiendo a distintos sistemas de referencia.

- Proponer y diseñar situaciones para la introducción de las transformaciones geométricas planas en la Educación Primaria.

- Adaptar los niveles de Van Hiele, para la formación del conocimiento geométrico, a la Educación Primaria, desarrollando una serie de situaciones que los tengan en cuenta.

- Proponer y practicar situaciones de percepción, representación, reproducción, construcción y descripción o designación de los diferentes entes geométricos asociados a cada espacio considerado o a cada geometría organizadora de cada uno de esos tipos de espacio.

3. Proposiciones didácticas sobre la enseñanza-aprendizaje de la geometría

En el seno de la didáctica de las matemáticas se puede considerar una corriente especial de didáctica de la geometría que, adoptando los principios teóricos de aquélla, fundamentalmente el corpus teórico de la escuela francesa (Brousseau[1], Chevallard[2], Vergnaud[3], Duval[4]) y los trabajos que se sirven, en mayor o menor medida, de ella y que se desarrollan actualmente en su seno o

[1] Brousseau G. (1998): *Fundamentos de Didáctica de la Matemática*, Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

[2] Chevallard, Y; Johsua, M.A. (1991): *«La trasposition didactique»*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

[3] Vergnaud G. (1992): «Concetti e schemi in una teoria operatoria della rappresentazione», en *Incontri con la Matematica* nº 6, Pitagora Editrice, Bologna.

[4] Duval, R. (1999): *Semiosis y pensamiento humano*, Cali, Universidad del Valle.

en otros ámbitos (Berthelot y Salin[5], D'Amore[6], Chamorro[7], Vecino[8]), ofrecen ciertas diferencias que proceden quizás de otras corrientes, el de pensamiento sobre la didáctica de esa rama de las matemáticas o sobre los principios psicológicos a tener en cuenta (Alsina *et al.*[9], Van Hiele[10], Piaget y García[11]).

Teniendo en cuenta las teorías de tipo didáctico o psicológico que proceden de ambos campos, podremos enumerar algunas de las bases fundamentales que sustentarían el desarrollo de una didáctica específica en el caso de la geometría:

1. Una geometría *dinámica* frente a la geometría estática tradicional (Castelnuovo[12], D'Amore).
2. Una geometría *interfigural e intrafigural* frente a la geometría exfigural propia de la enseñanza tradicional (Piaget y García, Vecino).
3. Una geometría que tenga en cuenta el *carácter deductivo* intrínseco al razonamiento geométrico pero también el *carácter inductivo* que pueden generar los diversos procesos o materiales propuestos para el desarrollo de la misma (Alsina *et al.*).
4. Una geometría caracterizada por los *grupos de invariantes* (topológicos, proyectivos o métricos) considerados de antemano, sin establecimiento de prelación alguna en las secuencias didácticas organizadas al efecto (Vecino, D'Amore).
5. Una geometría fundada en procesos de *percepción*, de *representación*, de *construcción*, de *reproducción* y de *designación* de los entes geométricos considerados en cada caso (Alsina *et al.*, Castelnuovo).

La proposición didáctica que hemos sugerido supondrá el uso de materiales diversos: *poliminos, geoplano, tangram, tiras de mecano, policubos…*, o de otros materiales como puedan ser la *tortuga de suelo Logo* o el ordenador con los diversos entornos (*Logo, Cabri*) que permiten la aproximación a los diversos conceptos geométricos a partir de la iconización que proporcionan los diversos materiales citados.

---

[5] Berthelot, J. R. y Salin, M. H. (1992): *L'enseignement de l'espace et de la géometrie dans la scolarité obligatoire*, Thése de Doctorat, Universidad de Bordeaux I, Bordeaux.

[6] D'Amore, B. (2002): *Elementos de Didáctica de la Matemática*, México D.F., Grupo Editorial Iberoamericano.

[7] Chamorro, Mª C. (1991): «Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental», Tesis microfilmada, Madrid: UNED.

[8] Vecino, F. (1996): *Los aspectos métricos de la representación espacial en los primeros años de la escuela elemental*, (Tesis de Doctorado), Madrid: UNED.

[9] Alsina, C.; Burgés, C. y Fortuny, J. M. (1987): *Invitación a la Didáctica de la Geometría*, Madrid: Síntesis.

[10] Van Hiele, H.P.: *Structure and Insight*, New York: Academic Press.

[11] Piaget Jean, García Rolando. (1985): *Psicogenesi e storie delle scienze»*, Milano: Garzanti.

[12] Castelnuovo, E. (1973): *«Didáctica de la matemática moderna*, México: Trillas.

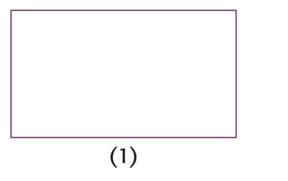
3.1. Geometría dinámica frente a geometría estática

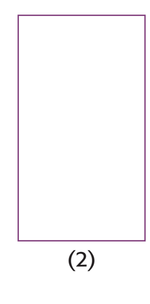
En una publicación aparecida hace bastantes años (Castelnuovo, 1961)[13] y en otras publicaciones posteriores de esta misma autora, se proponía ya una didáctica de la geometría que tuviese en cuenta ese carácter dinámico de la misma frente al carácter, más clásico, que supone la geometría de «tiza y pizarra». A pesar del paso del tiempo, más de dos décadas, poco ha cambiado en la escuela respecto a una enseñanza de esta materia que tuviese en cuenta ese carácter dinámico. Los efectos causados son evidentes y se han traducido en una serie de obstáculos didácticos que aparecen apenas se rasca un poco en la superficie aparente de los conocimientos geométricos que tiene un alumno de cualquier nivel de enseñanza.

a) *Un primer ejemplo de los efectos de la introducción de una geometría primordialmente estática:*

¿Cómo es posible que un porcentaje altísimo de los alumnos del primer curso de la diplomatura de maestro deje traslucir concepciones como las siguientes respecto a una figura tan básica?

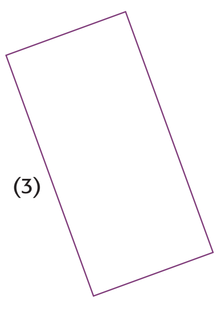
– ¡la base de un rectángulo es siempre mayor que su altura!, que se traduce en lo siguiente: dados los dos rectángulos que aparecen en la figura


(1)


(2)

¡el primero tiene base y el segundo no!

– ¡el rectángulo siguiente no tiene base!

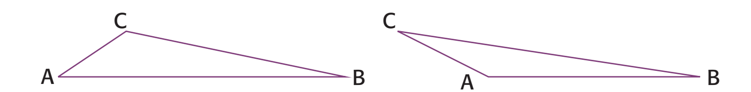


[13] Castelnuovo, E. (1973): *Geometria intuitiva*, Firenze, La Nuova Italia.

¿Cuánto y cómo han evolucionado, a lo largo de los años, sus concepciones sobre las figuras más simples de la geometría elemental, para que respondan de esa forma?

b) *Otro ejemplo de la aparición de obstáculos que causa una introducción estática de la geometría:*

Prácticamente todos los alumnos mencionados con anterioridad saben localizar la altura sobre el lado AB del primer triángulo, pero pocos la del segundo.

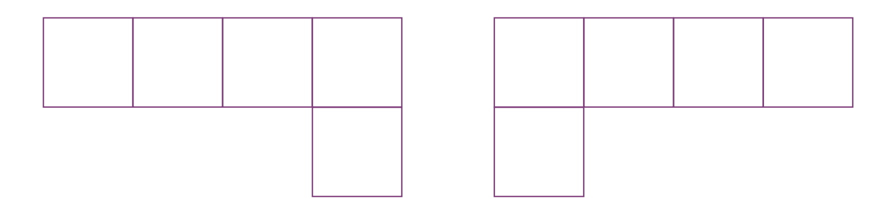


c) *Un ejemplo de los efectos de la introducción de una geometría dinámica:*

En una experiencia realizada conjuntamente en una escuela de la provincia de Arezzo (Italia) y en otra escuela de la provincia de Madrid, un maestro de esta última escuela, que imparte clases en 3º de Primaria, se muestra sorprendido por el hecho siguiente:

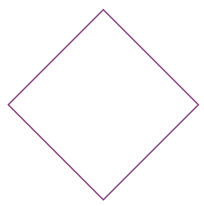
Se había propuesto a sus alumnos que construyesen los poliminos posibles utilizando un número n de cuadrados y ese maestro manifiesta: «sentirse sorprendido porque sus alumnos no encontrasen ninguna dificultad para admitir como iguales dos poliminos, donde uno resultaba de la aplicación de una simetría al otro».





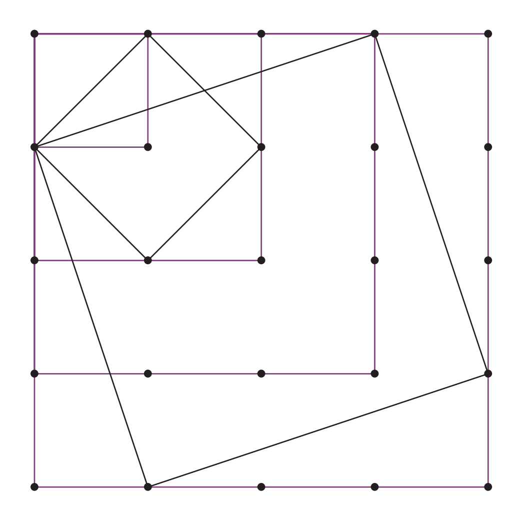
Resulta, entonces, evidente el efecto generalizador que produce la utilización de un material que permite construir una geometría dinámica.

En este mismo sentido convendría insistir al aludir, por ejemplo, a la consideración que a la práctica totalidad de los alumnos de 1º de Magisterio les merece, dentro de la clasificación de los cuadriláteros, la figura siguiente:



Casi todos responden que se trata de un rombo, con el consiguiente trabajo inútil que se derivaría de tal consideración si, por ejemplo, se tratase de hallar el área de la figura.

Esa visión de la figura les arrastra a construir sólo una serie de cuadrados cuando se les plantea la situación de construir todos los cuadrados posibles en un geoplano cuadrado de 5 × 5.



No tienen ninguna dificultad para construir los cuadrados en color de la figura, pero sí para construir cuadrados en línea negra. Éste es un ejemplo que pone de manifiesto la importancia de la construcción de una geometría dinámica: ¿el resultado sería éste si en los cursos de Primaria se usase un material didáctico, como el geoplano, que permite una construcción dinámica de la geometría elemental?

No se nos puede escapar la consecuencia principal que tales ejemplos revisten para la formación de maestros de Enseñanza Primaria: *la ausencia de un nivel suficiente de representación intrafigural*, que se traduce según Vecino[14] en efectos, generadores de obstáculos didácticos, como los siguientes:

1) La estaticidad de la figura, causada por la geometría estática que se propone en «la pizarra» o en «el libro de texto».
2) La no consideración de figuras constitutivas de otras figuras ni de figuras constituidas por otras varias, que impide relacionar distintas figuras atendiendo a criterios de composición y descomposición.
3) La independencia de las figuras entre sí, constituyendo cada una un ente aislado de las demás, aun de las más próximas por criterios evidentes de clasificación.

[14] *Op. cit.*, pág 4.

4) La consideración aislada y exclusiva de las propiedades esenciales de la figura presente, que provoca la no localización de elementos fundamentales de la figura considerada en su clase correspondiente.

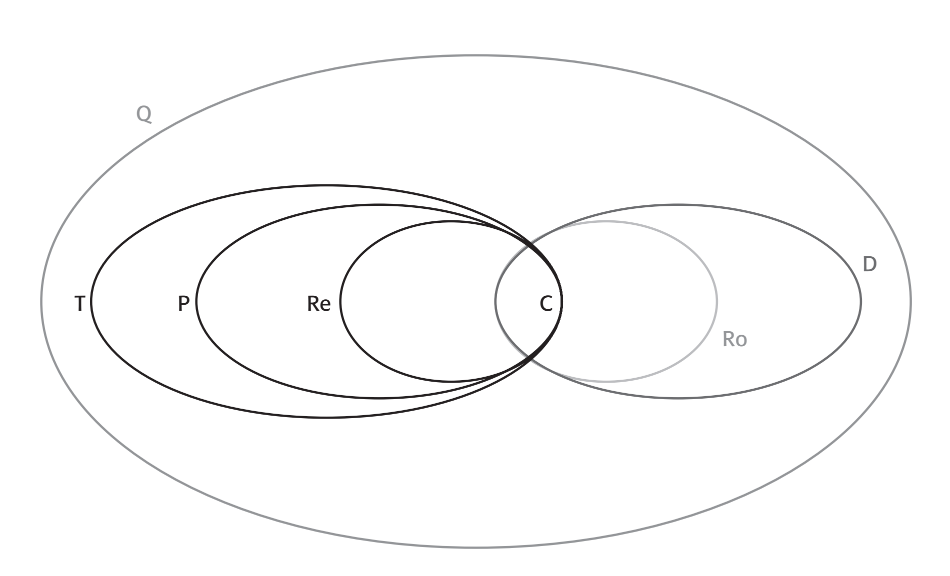
3.2. Geometría intrafigural e interfigural

Los resultados expuestos anteriormente y las conclusiones correspondientes tienen que ver con el tipo de geometría que se propone en la enseñanza elemental y, en particular, tienen que ver con la consideración o no de estos dos tipos de geometría.

Si adoptamos como geometría intrafigural aquella que da cuenta de las relaciones en el interior de una figura determinada y como geometría interfigural la que tiene en cuenta las relaciones mutuas entre diversas figuras, podemos poner en práctica una didáctica de la geometría que nos aproxime de una forma más correcta a los conceptos elementales de la geometría básica.

Tomemos como caso paradigmático la clasificación de los cuadriláteros convexos. Tal clasificación se puede poner de manifiesto mediante una representación por diagramas como la siguiente:

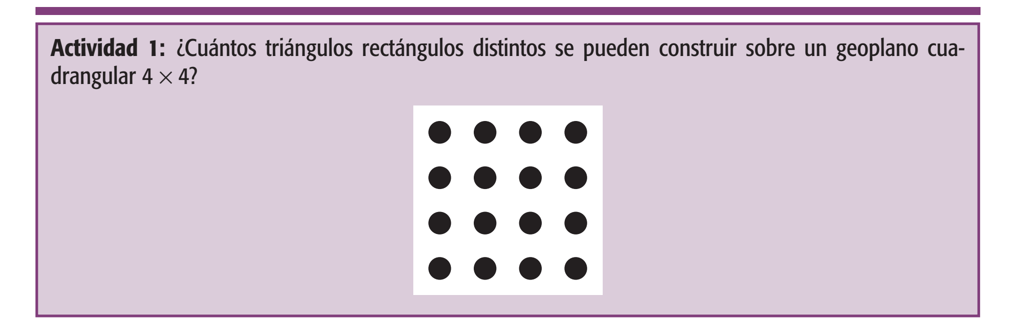
Q: Cuadriláteros convexos **T: Trapecios** **P: Paralelogramos**
D: Deltoides o cometas **Re: Rectángulos** **C: Cuadrados**
Ro: Rombos



Cuando los alumnos construyan esta clasificación, una vez que el profesor les haya planteado la situación[15] para que lleguen a construirla, estarán poniendo en práctica la geometría interfigural, ya que están relacionando unas figuras con otras atendiendo a diversos criterios: igualdad de lados, igualdad de ángulos, paralelismo de los lados, perpendicularidad de las diagonales, etc. La introducción, una a una, de las figuras elementales, analizando sólo para cada una de ellas sus elementos fundamentales produce una geometría intrafigural en alumnos que, por sus capacidades cognitivas, estarían como mínimo en el nivel potencial de desarrollo[16] de una geometría de otro tipo. Y es así como se van formando concepciones de la geometría que perviven y se hacen resistentes (obstáculos verdaderos) a lo largo de toda la enseñanza.

Solamente un desarrollo armónico de estos dos tipos de geometría, en la Enseñanza Primaria y, posteriormente en niveles sucesivos de enseñanza, de la geometría transfigural, es decir, de aquella que ayuda a establecer estructuras de conjunto en el interior de la materia, asegurarán unos buenos fundamentos geométricos al muchacho que se dirija hacia estudios universitarios.

Actividad 1: ¿Cuántos triángulos rectángulos distintos se pueden construir sobre un geoplano cuadrangular 4×4?



A propósito de lo anterior, un ejemplo que denota la falta de construcción de esos tipos de geometría es el ejercicio clásico que plantean, demasiadas veces, algunos libros de texto:

«*Hallar el área de un hexágono regular de lado 5 cm y de apotema 3 cm.*»

Tal ejercicio no es ni más ni menos que un ladrillo generador de una concepción de la geometría que implica, en realidad, una fuerte aritmetización. Los autores de tales manuales no se deben de haber parado a pensar o no dan la posibilidad de pensar a los usuarios (alumnos o maestros) de tales manuales sobre la posibilidad de existencia de tal figura.

¿Existe realmente ese hexágono? Una banal aplicación del teorema de Pitágoras demostraría que no es posible tal construcción. Una construcción intrafigural

[15] Podría utilizar las tiras de mecano como material didáctico para el desarrollo de la situación. Este material permite una deformación de los polígonos que resulta óptima para la transformación de unas figuras en otras.

[16] Vygotski Lev, S. (1979): *Los procesos psicológicos superiores*, Barcelona: Crítica.

(relacionando elementos dentro de ese polígono) e interfigural (considerando otras figuras, circunferencia circunscrita, triángulo equilátero y triángulo rectángulo, como generadoras o como componentes del mismo) aseguraría una mirada crítica, tanto sobre la proposición del ejercicio por parte de unos como sobre la resolución crítica y razonada por parte de otros.

Actividad 2: Discutir, mediante la utilización del teorema de Pitágoras, la existencia o no de ese hexágono.

En resumen, conectando estas dos primeras recomendaciones para una didáctica de la geometría digna de tal nombre, podríamos enumerar los beneficios que produce la conexión entre una didáctica dinámica de la geometría y una consideración simultánea de la geometría intra e interfigural. Tales beneficios pueden caracterizarse a través de las propiedades fundamentales de la geometría interfigural[17]:

1) La toma en cuenta de las diferentes posibilidades de construcción de la figura.
2) La consideración progresiva de las figuras elementales componentes de una figura más complicada.
3) La consideración de los elementos fundamentales de las figuras geométricas, mediante relaciones de éstas con otras asociadas a ellas.
4) El ejercicio de clasificaciones sobre conjuntos amplios de figuras, atendiendo a diversos criterios de equivalencia.

3.3. Carácter deductivo e inductivo en la enseñanza de la geometría

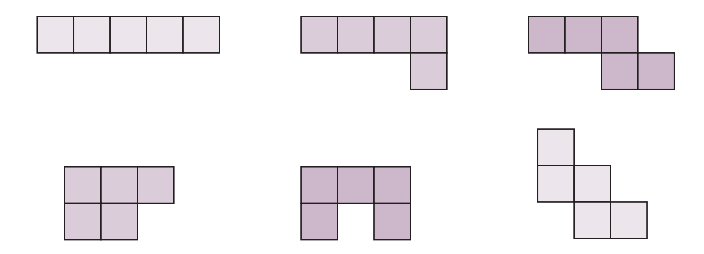
La geometría métrica y también la enseñanza de la misma a nivel elemental se ha caracterizado casi siempre por su carácter deductivo. No vamos a renunciar, en nuestra proposición didáctica, a tal método de trabajo consustancial a la construcción de la geometría, ni vamos a insistir tampoco sobre la conveniencia o la necesidad de trabajar la geometría mediante la práctica del método deductivo. Sin embargo si que nos gustaría introducir, como se propone actualmente en muchas publicaciones de didáctica de las matemáticas, la conveniencia de utilizar el método inductivo en la construcción de esa materia. Algunos autores, como Alsina, Bugués, Fortuny, llaman *búsqueda inductiva* a la utilización de ese método en el campo geométrico, ya que en definitiva se trata de la aplicación de

[17] Vecino F., *op. cit.*

esa forma de razonamiento general a la investigación sobre conceptos geométricos mediante el uso de diversos materiales específicos.

Muchos de los materiales didácticos que nos pueden ayudar en la introducción de la misma a nivel elemental pueden dar lugar fácilmente a la aplicación de ese método inductivo en las múltiples utilizaciones que se pueda hacer de ellos. Quisiéramos citar alguno de ellos subrayando, al mismo tiempo, ese uso del método inductivo en las diferentes propuestas didácticas que se hacen a los alumnos.

Uno de esos materiales didácticos son los poliminos[18] y, sobre todo, los construidos a partir de cuadrados, por una parte, y de triángulos equiláteros, por otra. La construcción de estas figuras no presenta mayor problema, en la mayoría de los cursos del segundo y del tercer ciclo de primaria, una vez comprendida la regla de formación y siempre que el número de cuadrados o de triángulos equiláteros sea bajo (de 1 a 5). Así no presenta casi ningún problema la construcción de los doce pentaminos que resultan utilizando cuadrados, algunos de los cuales vemos a continuación:



No se presentan problemas en la construcción pero si se empiezan a presentar problemas, independientemente del nivel, a la hora de controlar el número de ellos que debe resultar. El llegar a los doce distintos y el convencimiento de que resultan sólo esos doce, ni uno más ni uno menos, no resulta tan banal para esos alumnos de Primaria e incluso para alumnos de niveles superiores. No digamos cuando se trata de hallar el número total (35) de hexaminos.

Cuando se trata de indagar sobre el método de construcción que les asegure el número total, no se obtienen casi respuestas sobre la aplicación de cualquier tipo de método y, sin embargo, un adecuado trabajo a nivel didáctico podría conducir al enunciado de métodos de búsqueda inductiva como el que consiste en ir construyendo los de un determinado número de componentes a partir de los construidos con una unidad de menos componentes, es decir,

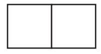
[18] Figuras construidas a partir de la utilización de figuras elementales (triángulos, cuadrados, hexágonos, etc.) respetando, sin embargo, en su construcción una regla simple: para formar figuras de orden superior hay que unir las figuras elementales de forma que su lado coincida, no es posible construirlas si coinciden en un lado sólo de forma parcial o si ambas figuras elementales tienen una intersección distinta de uno de sus lados. Así, con 2 figuras elementales iguales se obtienen los dominos, con 3 los triminos, con 4 los tetraminos, etc.

construir por ejemplo los pentaminos a partir de los tetraminos añadiendo otra componente elemental más.

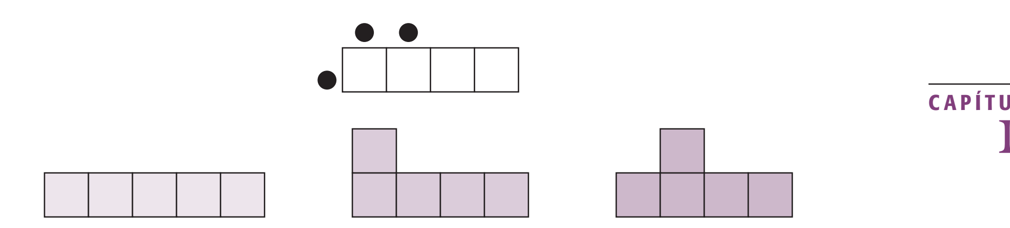
Veamos, como ejemplo ilustrativo, los pentaminos distintos que se obtienen a partir del tetramino siguiente:



Podemos adoptar como método, desde que tenemos el domino único que existe:



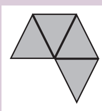
añadir un cuadrado más en los lugares posibles sin dar lugar a repeticiones dictadas por el sitio específico en que lo añadimos[19]. Según ello, en el tetramino dado podríamos añadir un cuadrado más en los lugares señalados:



dando lugar, entonces a los pentaminos que vemos en la línea de arriba.

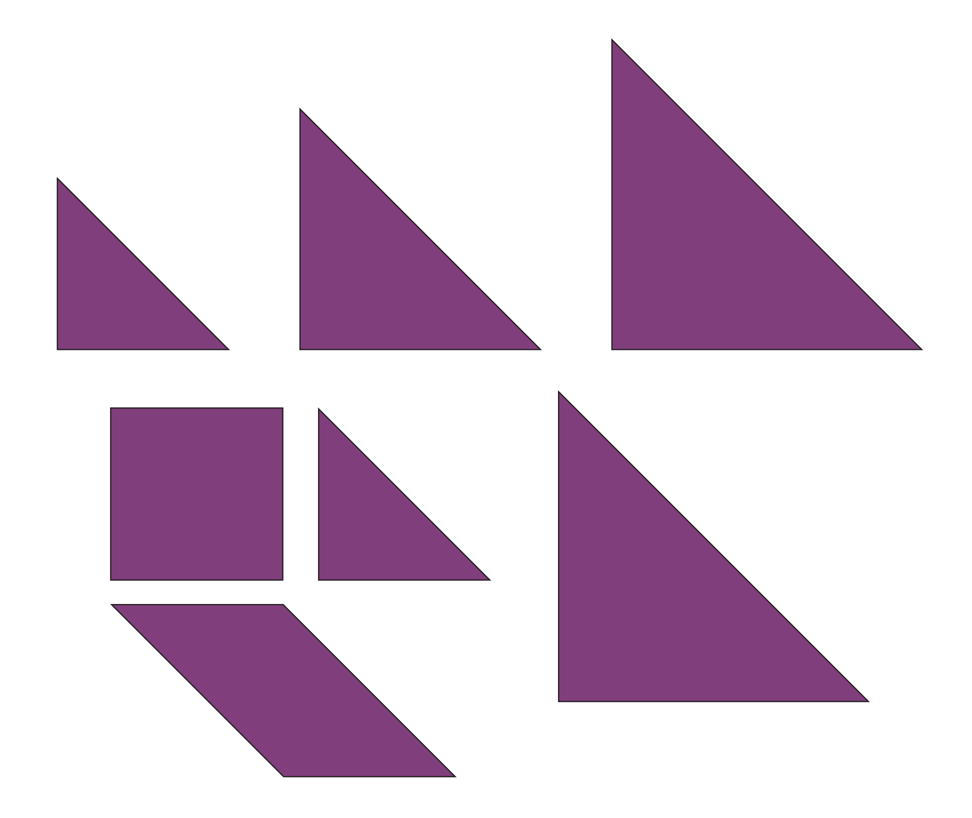
Repitiendo el método para cada uno de los cuatro tetraminos restantes, se llega a los doce pentaminos a que nos hemos referido. Ello habrá supuesto un método de búsqueda de tipo inductivo.

Actividad 3: Hallar, mediante búsqueda inductiva, cuántos pentaminos se pueden construir con triángulos equiláteros. Orientación: uno de los 3 tetraminos es



[19] Debemos tener en cuenta que dos figuras planas son iguales si existe una transformación geométrica plana (traslación, simetría o giro) que transforma una en la otra.

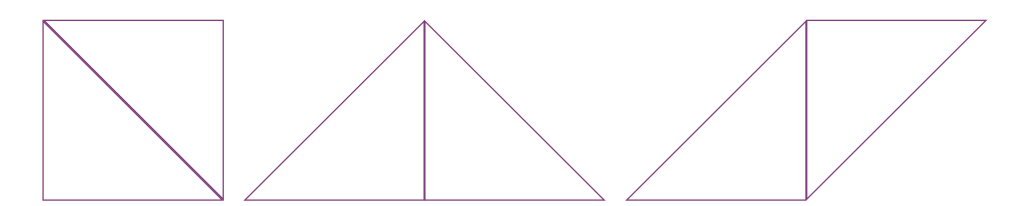
Otro material didáctico que permite esa construcción de tipo inductivo de la geometría, aparte de su intrínseca construcción deductiva, es el tangram. Este juego, de origen chino, permite generar figuras de la misma área a partir de sus siete componentes:



Esa generación de figuras tiene un cierto interés didáctico y puede implicar ciertos signos de inducción, pero tiene mucho más interés didáctico y mayor capacidad de utilización de un razonamiento inductivo una situación como la siguiente:

«¿Cuántos polígonos convexos distintos se pueden construir usando n piezas del tangram?» (n: 2, 3, …, 7)

Por ejemplo, si usamos dos piezas (los dos triángulos rectángulos pequeños), podemos generar las figuras siguientes:



Inductivamente podríamos haber ido generando una a partir de la otra y también, de forma inductiva, podemos generar otras figuras de mayor número de piezas a partir de las ya construidas.

Todos estos procesos específicamente geométricos de búsqueda inductiva, unidos a otros procesos del mismo tipo, pero de carácter aritmético o de razonamiento como los que se encuentran en Alsina *et al.*, deben configurar una de las vías didácticas de introducción de la geometría en la escuela elemental.

Actividad 4:¿Cuántos polígonos convexos distintos se pueden construir usando las piezas siguientes de un tangram?



3.4. Comportamiento didáctico ante los distintos tipos de geometría. Una revisión de las jerarquías piagetianas

Todas las investigaciones últimas sobre didáctica de la geometría en niveles elementales señalan la conveniencia de una buena construcción del espacio que prepare la modelización del mismo que constituye cualquier tipo de geometría. Esa construcción del espacio debe comenzar en el nivel de Educación Infantil, como paso previo para poder abordar posteriormente una construcción seria de la geometría, y debe encontrar, en el primer ciclo de Primaria, una prolongación a lo ya visto en el nivel anterior de enseñanza y un desarrollo de nuevos conceptos paralelo al de distintos conceptos geométricos, en los dos últimos ciclos de Primaria.

Resultará, de este modo, imprescindible el trabajo con los siguientes invariantes topológicos:

– Regiones respecto a un elemento de referencia: abierto, cerrado y frontera

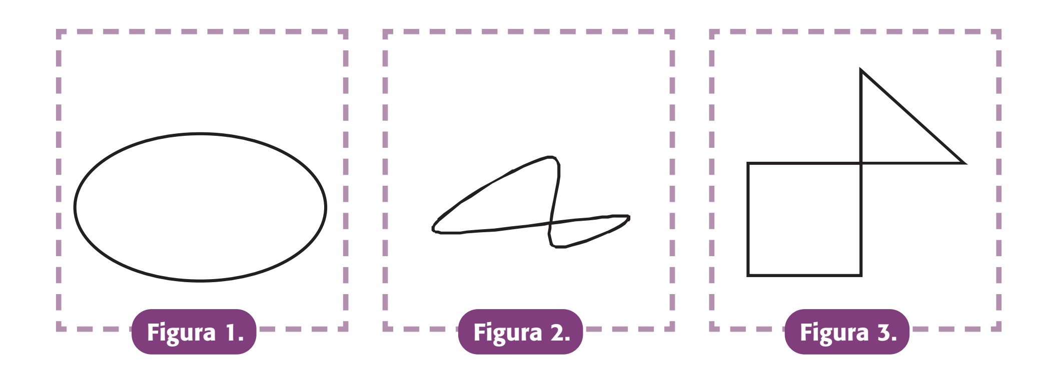
– Continuidad

– Orden

– Conexión

– Compacidad

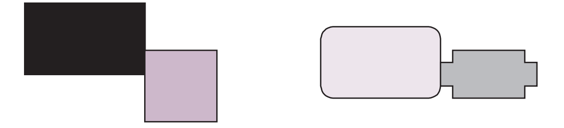
Ese trabajo se podrá desarrollar sobre materiales didácticos específicos, donde se reflejen tales conceptos: bingos, dominós, triminos, tetraminos, juegos de cartas (familias), juegos de tablero, etc. En tales materiales se debería reflejar la equivalencia topológica o el respeto de la serie de invariantes descrita unas líneas más atrás. Sirva como botón de muestra el siguiente ejemplo:



Las figuras 2 y 3 son topológicamente equivalentes entre sí (en ambas aparecen dos espacios cerrados con un punto en común), pero ninguna de ellas es topológicamente equivalente a la figura 1 (un solo espacio cerrado).

Otros ejemplos:

Las dos figuras son topológicamente equivalentes ya que son dos espacios compactos y conexos por una frontera común.



No así esta última formada por dos compactos no conexos (el cuadrado negro y el trapecio de color).



Estas dos figuras no son topológicamente equivalentes ya que son dos compactos pero en uno hay un agujero y en el otro dos.

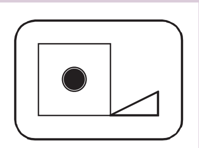


Como vemos, para determinar la equivalencia topológica se mira sólo a los invariantes citados y no a otros (como forma, medida, orientación, etc.) que no son pertinentes en este tipo de geometría. De esta forma se desarrolla un tipo particular de geometría llamada Topología, muy importante desde el punto de

vista de la construcción del espacio, en los niveles de Educación Infantil y primer ciclo de Primaria.



Actividad 5: Construir una familia de 5 cartas topológicamente equivalentes a:



Resultará además igualmente imprescindible el trabajo con conceptos proyectivos que pongan de manifiesto parejas de términos o términos individuales (invariantes) para referirse a la posición respecto a un referencial dado. Algunos de ellos son:

- delante – detrás
- encima – debajo
- sobre – bajo
- derecha – izquierda
- entre

Los materiales didácticos deberían ser del mismo tipo que los propuestos para el ejercicio de la Topología pero reflejando esos términos a que acabamos de aludir. Un ejemplo de muestra sería el siguiente:

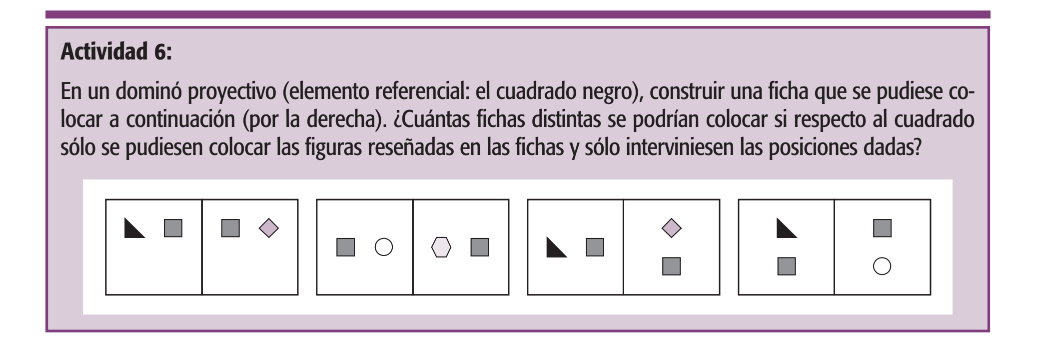




En ambas el referente es la persona y el invariante que se quiere introducir es delante (para el perro o la mesa). Proponiendo un material adecuado que dé lugar a trabajar con todos los invariantes citados, se está trabajando sobre un nuevo tipo de geometría, la Geometría Proyectiva que, evidentemente, modeliza el espacio de forma distinta a la forma en que lo hace la Topología.

Actividad 6:

En un dominó proyectivo (elemento referencial: el cuadrado negro), construir una ficha que se pudiese colocar a continuación (por la derecha). ¿Cuántas fichas distintas se podrían colocar si respecto al cuadrado sólo se pudiesen colocar las figuras reseñadas en las fichas y sólo interviniesen las posiciones dadas?



Por último, resultará asimismo imprescindible el trabajo con las isometrías del plano (traslaciones, giros y simetrías) y con las transformaciones de semejanza en el plano (homotecias o semejanzas).

Los materiales didácticos, para trabajar tales conceptos, deberían centrarse en situaciones donde:

- Se tratase de pavimentar el plano o una porción del plano.
- Se tratase de construir materiales como papel de regalo o papeles pintados.

A partir de unos pocos motivos elementales, para lo cual primero habría que trabajar previamente sobre las figuras elementales que pavimentan el plano (cuadrado, rectángulo, triángulo equilátero, hexágono regular, etc.) y con aquellas que no lo hacen (deltoide, pentágono, octógono regular, etc.).

Con este trabajo sobre las transformaciones geométricas planas se trabajarían otros dos tipos de geometría, la geometría afín o geometría del paralelismo y la geometría métrica o geometría clásica donde los invariantes principales son la forma y la medida.

El trabajo con los tres tipos de geometría citados se ejercería paralelamente sin dar prioridad a ningún tipo sobre otro, procurando seguir entonces una directiva ya clásica de la investigación sobre la didáctica de la geometría que contradice las tesis de Piaget sobre la prelación de unos tipos sobre otros.

3.5. Procesos de construcción, de reproducción, de representación y de designación en la didáctica de la geometría

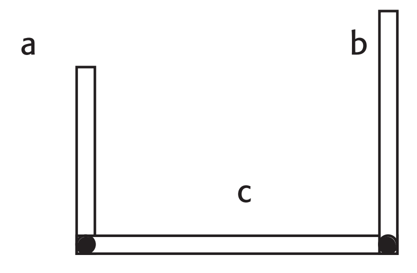
Hay toda una serie de procesos o de modos de proceder para generar los elementos geométricos básicos o para plantear e introducir los teoremas fundamentales de la geometría métrica en la enseñanza elemental.

Autores como E. Castelnuovo han contribuido decisivamente a traer a las aulas la proposición de unos procesos que han constituido, desde siempre, elementos fundamentales para la construcción de la geometría métrica.

a) *Implementación didáctica de los procesos de construcción*

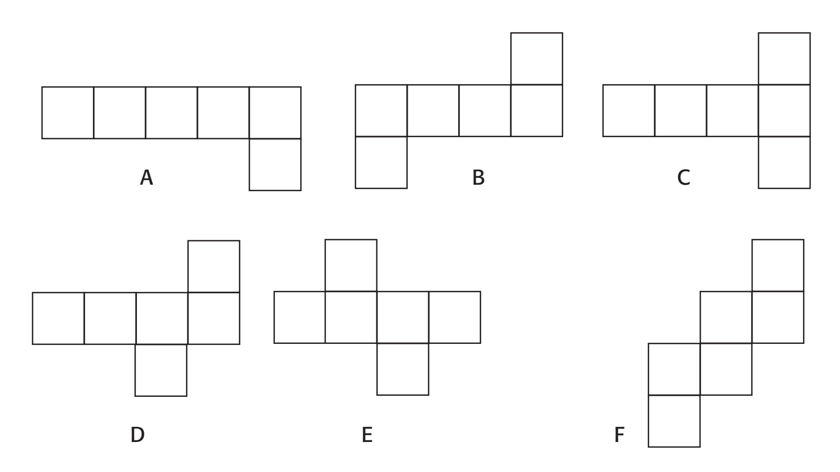
Algo tan elemental como las posibilidades de construcción del triángulo escapa del ámbito de la escuela elemental o, como mínimo, se hurta a los alumnos al no permitirles que experimenten con los materiales adecuados que les permitan un aprendizaje significativo sobre el concepto que se pretende introducir.

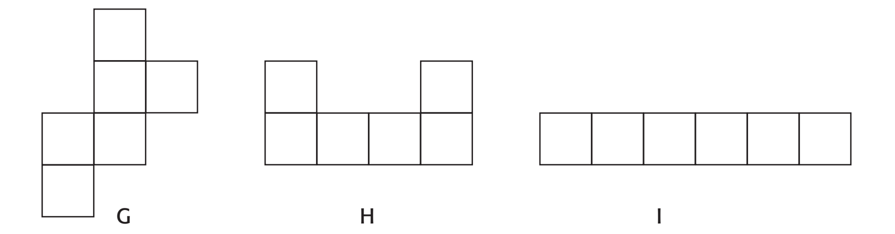
Las tiras de mecano son, otra vez, un material muy accesible y sencillo para inducir un método general para la construcción del triángulo a partir de tres segmentos dados:



Una simple construcción como ésta, que implica sólo tres tiras de cartón y dos remaches, permite establecer las condiciones para construir un triángulo a partir de tres segmentos dados a, b y c.

Otro concepto básico de la geometría elemental como es el que se refiere a los desarrollos planos del cubo puede ser también el resultado de un proceso de construcción que parta de la generación de los 35 hexaminos construidos con cuadrados iguales para discriminar, a partir de ellos, cuáles constituyen desarrollos planos del cubo.





El doble proceso de construcción que supone primero la construcción de los hexaminos con cuadrados y después la construcción del cubo a partir de algunos de ellos (B, C, D, E, F o G entre los once hexaminos que generan el cubo) y no de otros (A, H o I) puede constituir otro ejemplo de las posibilidades de construcción de la geometría a nivel elemental.

Actividad 7: Determinar, entre los hexaminos cuadrados, cuáles son los 11 desarrollos planos distintos del cubo.

b) Procesos de reproducción en la didáctica de la geometría

Desde un punto de vista didáctico parece también sumamente interesante la reproducción a partir de una figura dada o de un cuerpo dado, generando entonces una reproducción conforme (en la que se respetan las medidas del original) o no conforme (en que se construye una figura semejante). Ambos tipos de reproducción resultan aprovechables didácticamente ya que reconducen el interés de la situación didáctica hacia conceptos tan importantes para la geometría elemental como son la conservación de la medida (isometría) o la semejanza.

Queremos subrayar la importancia de gestión, por parte del maestro, de una variable didáctica tan esencial como es el tipo de material didáctico que se proporciona al alumno. Por ejemplo, si se proporcionan al alumno palillos para reproducir una figura construida con palillos de la misma medida, hay una probabilidad muy alta de que el alumno reproduzca la figura de una manera conforme, pero si lo que se proporciona al alumno es un tortuga de suelo Logo o el programa de ordenador Logo para reproducir una figura dibujada sobre un folio, puede ser que él haga una reproducción conforme o no conforme. En el último caso realizará, sin duda, una reproducción no conforme, impuesta por las restricciones que impone el material didáctico sobre el que se plasma la reproducción (la pantalla del ordenador).

Queremos destacar la importancia de este medio informático, tanto para obtener la reproducción de una figura como para conseguir una representación de la misma, ya que el programa construido para reproducir cada figura propuesta no será ni más ni menos que una representación más, de entre las que se pueden asociar a la figura a reproducir.

La reproducción de figuras deberá tener en cuenta la definición de figuras iguales, es decir, deberá implicar que «dos figuras son iguales si existe una isometría que transforma una en la otra». Ello permitirá aceptar como reproducción de una figura cualquier figura que resulte de la aplicación de traslaciones, giros o simetrías a la original. Con ello se refuerza una construcción dinámica de la geometría y se ayuda a evitar concepciones tan frecuentes como las que ligan la base o la altura de un triángulo o cuadrilátero a la orientación particular de tales polígonos, con las previsibles consecuencias en el cálculo de áreas, por ejemplo.

c) *Procesos de representación en la didáctica de la geometría*

Acabamos de aludir a las representaciones de una figura ligándolos a los procesos de reproducción de la misma. Parece obligado establecer, de entrada, la premisa que sobreentiende el dibujo de una figura como una de las representaciones asociadas a ella. Efectivamente cada ente geométrico tiene un carácter abstracto que obliga a una ostensión del mismo que lo haga visible. Partiendo de ello, a cada uno de esos entes le podemos asociar diversas representaciones, sean éstas implícitas (nos referimos a las representaciones mentales) o explícitas.

Habíamos aludido también, anteriormente, a una forma de representación como la que se construye para reproducir una figura con un medio informático como el que constituye en el entorno Logo. Sobre el uso de este universo debemos aclarar que resulta aprovechable en sus dos versiones: la física que se materializa en la tortuga o robot que va dibujando las figuras, a medida que se desplaza sobre un medio material de reproducción, y la virtual que es la que proporciona el programa de ordenador, en que la figura representativa de la tortuga es un triángulo que se desplaza por la pantalla.

Si construimos un programa como el siguiente:

Repite 4[Avanza :x giraderecha 120]

evidentemente estamos representando toda una infinidad de triángulos equiláteros que se materializarán a medida que damos valores a la variable x. Tal representación construida mentalmente estará ligada pues a una representación ostensiva que materializará esa figura elemental y, por tanto, parece interesante la consideración de un material didáctico tan potente como éste, ya que liga representaciones entre sí y, además, las representaciones ostensivas pueden dar lugar a reproducciones de cualquier figura propuesta.

Al igual que sucede con todos los materiales didácticos, la utilización de las dos versiones de Logo a las que hemos aludido más arriba constituirá una variable didáctica que cada maestro podrá utilizar en su clase dependiendo del nivel de sus alumnos. Parece más adecuada la versión física para los alumnos de los primeros cursos de Primaria e incluso para los de

Infantil, mientras la versión virtual será más adecuada para los alumnos de los últimos cursos de Primaria o para alumnos de niveles posteriores (ESO o bachillerato).

Sin embargo se debe tener en cuenta el tipo particular de geometría que construye este medio informático ya que se trata de una geometría muy ligada al lugar en que se encuentra el móvil y a la orientación que adopta en cada momento. Nótese que, en la representación del triángulo reflejada más arriba, se utiliza la medida del ángulo exterior del triángulo, cuando en la geometría elemental que se construye en la Enseñanza Primaria se tienen en cuenta fundamentalmente los ángulos interiores de la figura. Creemos, con todo, que esta peculiaridad de la geometría construida con Logo contribuye al enriquecimiento de la construcción de la geometría métrica, ya que obliga a la consideración de otros elementos que no se tienen en cuenta al usar otros materiales didácticos.

Hemos insistido en la utilización de un material didáctico como el Logo, en relación a la representación, porque es un medio aséptico que permite hacer aflorar las representaciones mentales que tiene el alumno y porque hace que se materialice tal representación, una vez que la tortuga ejecuta las distintas órdenes con las que el «programador» ha construido la representación asociada al objeto geométrico que se trata de representar.

d) *Procesos de designación en didáctica de la geometría*

La representación de figuras o cuerpos geométricos está íntimamente ligada a la designación de las mismas ya que, a partir de las diferentes definiciones teóricas de representación, se llega siempre a distintas formas de designación y ello es, en general, común a todo proceso de construcción de cualquier concepto matemático. Se hace necesario, en cualquier caso, asociar la representación mental de cualquier ente matemático a una designación que puede provenir de distintos registros semánticos, con la consiguiente construcción de un lenguaje propio de esta ciencia de carácter preeminentemente abstracto.

Una actuación didáctica sumamente interesante para desarrollar el lenguaje geométrico es el dictado de figuras, que constituirá una verdadera situación de formulación entre dos sujetos diferentes. Tal dictado implicará un doble proceso:

– De construcción de un discurso geométrico a partir de una figura dada y

– De traducción posterior de ese discurso en una figura que obligatoriamente debe ser igual a la figura de partida.

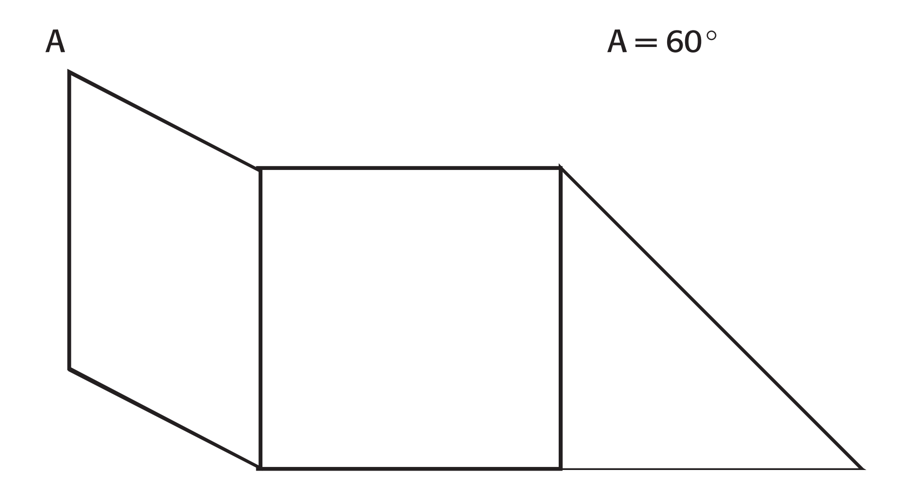
Los instrumentos mínimos para poder emprender ese dictado de doble dirección son:

– Desde el punto de vista lingüístico, el lenguaje básico geométrico universalmente aceptado, es decir, el lenguaje para designar cada una de las figuras geométricas elementales (rectas, planos, puntos, polígonos, ángulos, situaciones relativas, orientación en el plano, medida de magnitudes espaciales, etc.), lenguaje impuesto culturalmente y aceptado universalmente.

– Desde el punto de vista didáctico, obligatoriamente los actores del ejercicio de esa clase particular de dictado deben ser dos alumnos, dos grupos de alumnos, un alumno y un grupo de alumnos, para que uno sea el que construye, oralmente o por escrito, la designación de una figura que no puede ver su o sus oponentes y el otro u otros sean los que dibujan la figura cuya designación escuchan en el discurso o mensaje enviado.

Será la confrontación posterior de la figura de partida y la figura de llegada la que validará el proceso de dictado a que nos estamos refiriendo.

Podemos pensar, por ejemplo, en la descripción de una figura como la siguiente:



Podemos pensar en distintas formas de descripción: a partir de tres polígonos elementales, a partir de dos polígonos elementales y de un segmento, etc. Estas formas de descripción han de tener en cuenta, evidentemente, los lados o segmentos coincidentes que dan lugar a una descripción completa de la figura propuesta.

Nótese que hay una variable didáctica importantísima: el tipo de papel sobre el que está dibujada la figura de partida (papel en blanco, papel cuadriculado, papel pautado), ya que la clase particular de papel influirá en que la figura obtenida sea isométrica a la de partida o semejante a ella.

Otra variable didáctica importantísima sería el material que se proporciona a los alumnos tanto en la figura de partida como para materializar la

figura cuya descripción van oyendo. Será distinto proporcionar al alumno sólo lápiz y un determinado tipo de papel o proporcionarle palillos, por ejemplo, partiendo de una figura inicial simplemente dibujada o construida con ese material manipulable (los palillos).

Conviene además tener en cuenta la validez de la figura dibujada a partir del dictado, cualquiera que sea la orientación de la misma, pues ello supone simplemente tener en cuenta la definición de figuras geométricas iguales a las que aludíamos algunos puntos más atrás.

Actividad 8: Describir la figura anterior, con el lenguaje geométrico elemental, para que otra persona sea capaz de dibujarla a partir de la descripción elaborada.

4. Aspectos complementarios

4.1. Geometría y dimensión del espacio que se trata de modelizar

La génesis de los conceptos geométricos en el niño impone la construcción y modelización de un espacio sobre el que él pueda actuar y construir los distintos conceptos geométricos de la geometría elemental.

Por otra parte, el estado de desarrollo cognitivo del niño impondrá que la acción didáctica plantee situaciones que, tomando como base la zona de desarrollo efectivo, se desarrollen primordialmente en la zona de desarrollo potencial (Vygotski). Esa acción didáctica no será posible si las situaciones a las que enfrentamos al alumno no se desarrollan en un espacio que permita ejercer la devolución (Brousseau). El alumno se debe enfrentar a situaciones espaciales en las que pueda manejar, pueda confrontar, pueda ejercer su acción y pueda designar los diversos elementos espaciales a los que se enfrenta. Esto no es posible si no se tiene en cuenta la talla del espacio sobre el que se plantean las diversas situaciones de enseñanza-aprendizaje.

Esa importancia de la relación con el medio, que se traduce en la consideración del tamaño del espacio a efectos de enseñanza, la señala Gálvez[20] cuando manifiesta que «para trazar un círculo, con las trabas que impone el microespacio, el método puede ser elegir un disco como plantilla, mientras que en el mesoespacio tal procedimiento no sería pertinente» (evidentemente se trata de un

[20] GÁLVEZ, G. (1985): *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano: una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria*, Tesis doctoral, México, Centro de Investigación del IPN.

botón de muestra que pone de manifiesto la importancia del tamaño del espacio para la construcción de las situaciones de enseñanza-aprendizaje correspondientes).

Se impone, pues, la consideración de tres tamaños de espacio en los que situar las diferentes actividades espaciales del niño: *microespacio* (espacio sobre el que se puede actuar con las articulaciones propias y con los medios primarios de que se dispone), *mesoespacio* (espacio sobre el que se puede actuar teniendo en cuenta su proximidad física y afectiva y la posibilidad efectiva de utilizar medios que implican una cierta representación del mismo) y *macroespacio* (espacio que sobrepasa los límites de acceso al mismo y que exige la utilización de medios avanzados de representación). Partiendo de la introducción que hace Gálvez y continuando con la investigación realizada por diversos autores (Brousseau, D'Amore, Berthelot y Salin, Peres, Vecino, etc.), se llega a la conclusión de que en la Educación Primaria el medio más adecuado para trabajar la geometría lo constituyen el micro y el mesoespacio.

4.2. Los niveles de Van Hiele para la construcción de la geometría

Otro elemento teórico que debemos tener en cuenta, si queremos proponer un currículo completo sobre el tema, es el modelo de aprendizaje de Van Hiele[21], con los correspondientes niveles que señala este autor y las fases de aprendizaje que se deben producir para pasar de un nivel a otro, sobre todo cuando el resultado de investigación ha señalado que ese paso es independiente de la edad y, como orientación didáctica consecuente, se deduce que el profesor a través de los contenidos y métodos de enseñanza puede provocar el paso de un nivel a otro en cualquier edad.

El problema está en determinar qué niveles pueden ser considerados para el desarrollo de los conceptos geométricos en general y de las transformaciones geométricas en particular, de forma que se respete el desarrollo cognitivo de los niños de esas edades. Tratando de responder a esta problemática, no se plantearían grandes dificultades para admitir que en ese currículo se tuviesen en cuenta los siguientes niveles:

– El nivel 0 (visual) formaría parte del mismo, al tratar de la percepción de figuras geométricas y de la integración de atributos en ellas.

– El nivel 1 (descriptivo/analítico) también podría ser integrado, al estar relacionado, de forma irremediable, con la representación interna y externa de las figuras consideradas y, por tanto, con la intrafiguralidad.

[21] Una descripción clara de tal método la podemos encontrar en: ALSINA, C.; BURGÉS, C. y FORTUNY, J. M. (1987): *Invitación a la Didáctica de la Geometría*, Madrid: Síntesis.

– El nivel 2 (relacional) debería ser asimismo considerado al contemplar las relaciones entre figuras diversas y, por tanto, al entrar directamente en el campo de lo interfigural, campo preferente del desarrollo geométrico en Primaria.

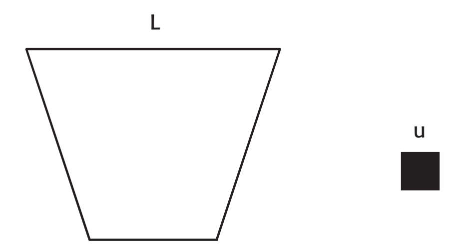
Todas las fases de aprendizaje del modelo, desde el «*Discernimiento*» hasta la «*Integración*», podrían ser asumidas, dentro de un planteamiento didáctico para la Educación Infantil, siempre que esas fases se ejercitasen sólo en los tres primeros niveles cuya viabilidad se prevé para esta etapa de la educación del niño.

4.3. La geometría y la medida, dos grandes capítulos de la enseñanza elemental, condenados a entenderse

La propia etimología de la palabra geometría implica su relación con la medida, dado el significado del término griego (*μετρια*) que interviene en la composición de la palabra.

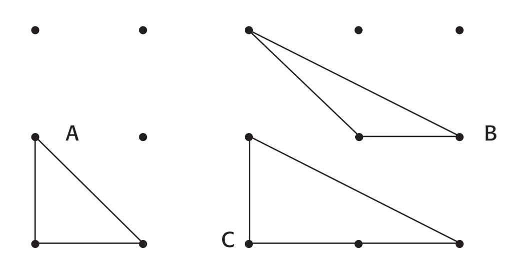
La construcción de ambos capítulos (el geométrico y el de medida) resulta respectivamente diferente desde un punto de vista didáctico[22] y por tanto, en principio, conviene separar los itinerarios didácticos a recorrer en uno o en otro. Se deberá llegar, sin embargo, a un punto de encuentro cuando se trata de calcular la medida (perímetros, áreas o volúmenes) de determinadas figuras o cuerpos geométricos, según corresponda.

Materiales didácticos especialmente adecuados para dar sentido a la medida de figuras o de cuerpos son los poliminos, el geoplano, el tangram, los policubos, el polidron, etc. Con ellos se puede iniciar al alumno en la construcción de las relaciones entre ambos temas, de forma que el alumno reflexione sobre la significación de las longitudes, áreas o volúmenes hallados. No es difícil que, por ejemplo, un alumno de bachillerato o universitario nos hable de que el lado L de la figura mide x unidades u, señal inequívoca del escaso uso que ha hecho de los materiales citados.



Pongamos, en cambio, algún ejemplo del uso de esos materiales. Si usamos el geoplano resulta bastante sugestivo el descubrimiento de que los triángulos A y B tienen igual área pero la mitad de la del triángulo C.

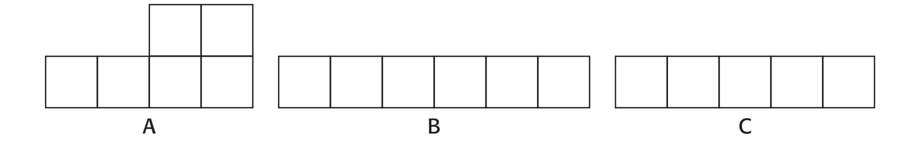
[22] Véase al respecto la construcción didáctica de la medida en cualquier magnitud en: CHAMORRO, M. C. y BELMONTE, J. M. (1988): *El problema de la medida*, Síntesis, Madrid.



Por otra parte se puede emprender un cálculo de perímetros a partir del teorema de Pitágoras, aunque en algunos casos pueda parecer prematura su introducción en la Enseñanza Primaria.

Actividad 9: Razonar por qué en la figura los triángulos A y B tienen igual área, pero la mitad del área del triángulo C.

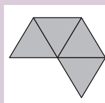
La propia construcción de poliminos resulta interesante para poner de manifiesto que los dos poliminos A y B tienen igual área pero distinto perímetro o que los A y C tienen igual perímetro pero distinta área.



Resulta pues interesante, desde un punto de vista didáctico, la clasificación de los poliminos atendiendo al área, por una parte, y al perímetro por otra, procediendo después a relacionar el área con el perímetro, evitando así esa idea de proporcionalidad directa (área-perímetro) que se instaura normalmente en la mente del que aprende sin el uso de materiales didácticos específicos.

Con los hexaminos resulta además conveniente conjeturar cuál es el área total de un cubo a partir de los desarrollos planos del cubo y, a partir de ello, extenderse hacia el cálculo del área total del ortoedro formado por varios cubos. Pero para esto existe un material didáctico específico como es el polidron o la generación de policubos a partir de cubos que se unen por una cara.

Actividad 10: Encontrar un tetramino triangular de igual área y perímetro que:



La generación de policubos (a partir de un material didáctico formado por cubitos encajables) proporciona un cálculo introductorio tanto para el cálculo de las áreas totales como para el de los volúmenes.

Podríamos continuar así proponiendo ejemplos del uso de los materiales mencionados al principio, pero con la muestra ofrecida creemos haber dado un ejemplo de esa introducción a la medida previa en cualquier caso a la introducción del Sistema Métrico Decimal en la medida o del cálculo de áreas o volúmenes en la geometría.

BIBLIOGRAFÍA

ALSINA C. y otros (1988): *Materiales para construir la Geometría*, Síntesis: Madrid.

BURGUÉS C. y otros (1987): *Didáctica de la Geometría*, Síntesis: Madrid.

CASTELNUOVO E. (1973): *Didáctica de la matemática moderna*, Trillas: México.

CHAMORRO M.C. y BELMONTE J.M.(1991): *El problema de la medida*, Síntesis: Madrid.

CHAMORRO, C. (1997): *Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental,* Tesis doctoral microfilmada, Madrid: UNED.

CAPÍTULO 12

El desarrollo del pensamiento aleatorio en Educación Primaria

ÍNDICE

Francisco Vecino Rubio

1. Introducción

La introducción del pensamiento aleatorio, complementario del pensamiento determinista que impera en los currícula de matemáticas de Educación Primaria, parece justificada desde:

– Un punto de vista social, ya que hay numerosas situaciones del entorno del niño que revisten un carácter aleatorio (juegos infantiles y escolares, juegos de apuestas de su entorno familiar, predicciones meteorológicas…) que podrían ser aprovechadas para una formación social más completa de los escolares.

– Un punto de vista formativo, ya que el desarrollo del pensamiento lógico-matemático del alumno que aprende no puede basarse solamente en las disciplinas que desarrollan una visión determinista del pensamiento lógico, sino también en esta rama de las matemáticas que trata de modelizar el funcionamiento de lo incierto, de lo plausible, de lo probable.

La escuela Primaria ofrece múltiples posibilidades de desarrollo del pensamiento probabilista y, sin embargo, la introducción de esta rama de las matemáticas se pospone a la escuela Secundaria. Queriendo aprovechar todas esas posibilidades, nos atrevemos a proponer una serie de ideas, de sugerencias y recomendaciones para la iniciación de los niños en el pensamiento aleatorio.

La exigencia de rigor que se plantea desde un punto de vista epistemológico exige además:

– La introducción anterior del pensamiento combinatorio, elemento coadyuvante para una correcta determinación de los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio que sobrepase los estrechos límites de la obviedad.

– El tratamiento posterior de datos, desde un punto de vista estadístico, para lo cual constituye una ayuda fundamental un desarrollo lo más completo del pensamiento aleatorio y de los conceptos ligados al mismo, consiguiendo así una derivación práctica de las teorías probabilistas de indudable valor formativo para la interpretación de la realidad.

2. Objetivos

– Conocer algunos principios de epistemología genética sobre la adquisición de las ideas básicas del pensamiento no determinista.

– Conocer y analizar las principales propuestas sobre la enseñanza-aprendizaje de la combinatoria.

– Conocer y analizar las principales propuestas sobre la enseñanza-aprendizaje de las ideas probabilistas.

– Considerar la importancia de la didáctica de la probabilidad para desarrollar la estadística como campo aplicativo de gestión y análisis de datos.

– Diseñar y desarrollar el currículo referente al pensamiento combinatorio necesario para emprender una didáctica de la probabilidad.

– Diseñar y desarrollar el currículo referente al desarrollo del pensamiento probabilístico en el niño a partir de los resultados de investigación más relevantes.

3. Principales obstáculos para la inclusión del pensamiento probabilístico en el currículo de Educación Primaria

La introducción de los conceptos probabilistas iniciales, en los primeros niveles de la Educación, se encuentra con una serie de obstáculos que la hacen bastante inviable en la actual ordenación educativa del nivel de Primaria. Algunos de esos obstáculos son:

– La ausencia prácticamente total, en el currículo oficial, de cualquier referencia a la introducción del pensamiento combinatorio, como parte de la formación matemática del alumno de esos niveles.

– La ausencia prácticamente total, en el currículo oficial, de cualquier referencia a la introducción del pensamiento probabilista como parte de la formación matemática del alumno de esos niveles.

– La presencia de ciertas ideas, recomendaciones y sugerencias sobre el tratamiento de la información, sin la base epistemológica suficiente que proporcionaría una inclusión explícita en el mundo probabilístico y combinatorio.

– La concepción didáctica que subyace en las mismas orientaciones oficiales que hace imposible tales introducciones, por la prelación que impone de unos temas sobre otros.

– Una visión restringida sobre el desarrollo de los conceptos matemáticos que impone solamente el tratamiento de una serie de temas que privilegian una interpretación determinista y cerrada del pensamiento matemático.

– La concepción de utilidad inmediata que impregna la mayoría de los currícula matemáticos de este tramo educativo, desechando las posibilidades que puede proporcionar una formación matemática más completa y con una cierta perspectiva de futuro.

Estos obstáculos no deben, sin embargo, torpedear las intenciones que nos animan sobre una formación matemática más completa de los alumnos de

Educación Primaria y sobre una formación en didáctica de las matemáticas más coherente de los maestros de ese mismo tramo de la Educación Obligatoria.

4. El desarrollo de las primeras ideas sobre el universo probabilista en el niño de Educación Primaria

Los estudios de Piaget e Inhelder[1], Engel[2], Glaymann y Varga[3], Fischbein[4], Martíni y Aglì[5], etc. plantean la posibilidad de ciertas adquisiciones en torno a los conceptos probabilísticos y combinatorios que cualquier maestro de Primaria debería tener en cuenta si desea acercar a sus alumnos al conocimiento de ciertas ideas sobre el mundo del azar y sus aledaños.

Aquí resumiremos algunos de los resultados, expuestos por dichos investigadores, sobre la adquisición de algunas ideas probabilistas en el niño.

La representación del azar, no intuitiva en la edad preescolar, se hace operativa en el período de Primaria como opuesto a lo determinista. Además la influencia social consigue que el niño vaya adquiriendo, progresivamente, nociones cada vez más completas, de la frecuencia relativa ligada a los sucesos impredecibles del mundo del azar.

No parece del todo claro que el alumno de Primaria sea capaz de proceder a la comparación de probabilidades en todos los casos. Sólo aparece clara esta adquisición si se trata de sucesos, asociados a experimentos diferentes, donde el número de casos favorables y el número de casos desfavorables son iguales en ambos experimentos. En casos distintos donde se trate de determinar la igualdad de probabilidades, no parece que se produzcan adquisiciones relevantes respecto a las que aparecen en el nivel anterior de Infantil; no hay constancia de que el niño de Primaria pueda determinar que dos sucesos son equiprobables en la práctica totalidad de los experimentos aleatorios que se les puede proponer.

En este período de las operaciones concretas el niño sólo es capaz de determinar las posibilidades ligadas a un experimento combinatorio en el caso en que se le proporcionan un escaso número de elementos a combinar y, casi siempre, a través de operaciones de ensayo y error, con ciertas inseguridades sobre el agotamiento de todos los casos posibles. Parece posible que el desarrollo de

---

[1] PIAGET, J. e INHELDER, B. (1974): *La genese de l'idée de hasard chez l'enfant*, PUF, París.

[2] ENGEL, A.(1975): *L'enseignement des probabilités et de la statistique*, CEDIC; París. (Tomo 1)

[3] GLAYMANN, M. y VARGA, T. (1975): *Las probabilidades en la escuela*, Teide: Barcelona.

[4] FISCHBEIN, E. (1975): *The intuitive sources of probability thinking in children*, D. Reidel: Dordrecht.

[5] MARTÍNI, A. y AGLÌ, F. (1989): *Spazio, tempo, eventi*, Armando Editore: Roma.

determinados medios de representación (diagramas en árbol, tablas de doble entrada, etc.) pueden contribuir a la obtención de todos los casos posibles asociados a una situación combinatoria.

Casi todos los autores citados anteriormente opinan que la instrucción puede causar un efecto beneficioso sobre la adquisición de las ideas probabilísticas y combinatorias en la Escuela Primaria, contradiciendo en cierta forma las opiniones de Piaget e Inhelder que retrasaban tal adquisición hasta el período de las operaciones formales.

5. Principios didácticos para la introducción del mundo aleatorio en el currículo de Educación Primaria

Las expectativas que abre el último párrafo del punto anterior y la voluntad firme de cambiar la situación descrita en el punto 3, nos animan a proponer una serie de principios que sustenten la propuesta didáctica que elaboraremos con el ánimo de que los maestros de Educación Primaria dispongan de un desarrollo didáctico de la probabilidad susceptible de mejorar la educación matemática de sus alumnos.

La proposición que hacemos al respecto es la siguiente:

1) Aprovechar el entorno familiar al niño (juegos, loterías, entorno familiar, etc.) para proponer situaciones que le acerquen al mundo de la combinatoria y del azar, y a la determinación de ciertas probabilidades asociadas.
2) Aprovechar el entorno escolar del niño y las posibilidades de interdisciplinariedad que éste ofrece para plantear situaciones donde el niño pueda organizar datos, combinarlos y calcular probabilidades asociadas.
3) Enmarcar las situaciones propuestas en un campo de experimentación (con monedas, peonzas, bolas, dados, cartas, etc.) donde se hagan patentes, para los niños, las distintas posibilidades de combinación, las distintas posibilidades de aparición de un determinado resultado, las distintas formas de registro y de organización de los resultados.
4) Desarrollar el vocabulario específico de los saberes que se pretende introducir, desde las expresiones coloquiales asociadas al mundo probabilístico, combinatorio o estadístico, hasta las expresiones propias del saber sabio que se está pretendiendo introducir.
5) Desarrollar toda la serie de posibilidades de representación asociadas, para facilitar así: la organización de datos, la lectura de datos, la determinación de frecuencias o probabilidades, la consecución de todas las posibilidades combinatorias, la obtención de medidas ligadas a la probabilidad, estadística o combinatoria.

6) Utilizar la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau) como marco teórico para la proposición de situaciones donde se conceda una gran importancia a las fases de formulación y de validación de los resultados obtenidos en la resolución de las mismas.

7) Organizar la secuencia de situaciones propuestas al alumno de forma que el trabajo en grupo se transforme en una constante y, de este modo, facilitar la aproximación del alumno a las tareas problemáticas complejas que suponen la mayoría de las situaciones relacionadas con el universo aleatorio.

6. Proposición de contenidos en un currículo para la Educación Primaria

Los principios que acabamos de enunciar imponen una cierta cautela a la hora de diseñar un currículo para la Educación Primaria. A la vez, los estudios sobre la didáctica del tema de los principales investigadores (Engel, Fischbein, Varga, etc.) nos animan a ser un poco osados en la proposición del mismo.

Lo organizaremos en dos partes: Desarrollo primario de combinatoria y Desarrollo primario de las ideas probabilistas.

1) *Desarrollo primario de combinatoria*
   - La combinatoria sin reemplazamiento:
     – Variaciones sin repetición. Permutaciones como caso particular
     – La importancia de la consideración del orden. Combinaciones
   - La combinatoria con reemplazamiento:
     – Formación de variaciones
     – Representación de variaciones. Posibilidades

2) *Desarrollo primario de las ideas probabilistas*
   – Experimentos aleatorios y experimentos deterministas
   – Conjunto de sucesos asociados a un experimento aleatorio
   – Sucesos seguro, probable e imposible
   – Asignación de frecuencias a un suceso. Frecuencia absoluta y relativa de un suceso. Representaciones asociadas
   – Comparación de frecuencias relativas
   – Noción de probabilidad. Comparación de probabilidades

Creemos que se trata de un currículo susceptible de ser desarrollado en Primaria si se introducen los contenidos expresados en él de forma que se respete

el nivel cognitivo de los alumnos y se propongan las situaciones didácticas adecuadas para desarrollarlos.

7. Proposición de una secuencia didáctica para desarrollar las primeras ideas de combinatoria en los alumnos de Primaria

La construcción de situaciones didácticas que conformen la secuencia correspondiente se tiene que guiar por los principios generales establecidos en las teorías de la didáctica fundamental, ya que se trata de elaborar aquellas situaciones que servirán para que los alumnos inicien la elaboración de una serie de conceptos nuevos, conceptos que tienen que ver con las teorías matemáticas sobre la combinatoria. Se debe subrayar el carácter introductorio de dichas situaciones, ya que todos los estudios sobre la adquisición de esos conceptos en el niño apuntan la imposibilidad de llegar a una institucionalización de los mismos hasta el período madurativo de las operaciones formales (12-16 años).

Hemos señalado el aprovechamiento de situaciones próximas al alumno como uno de los principios didácticos que deben estar presentes en el diseño de esas situaciones introductorias, pero además es deseable que tales situaciones vayan acompañadas, en su resolución, por toda una serie de representaciones gráficas que ayuden a la resolución de las mismas. Para ello el maestro tendrá que gestionar cuidadosamente una variable didáctica tan importante como es la de la representación del problema (véase Capítulo 10).

Procederemos pues, en todas y cada una de las situaciones didácticas propuestas, desde la formación de los agrupamientos o asociaciones requeridas hasta el cálculo del número de las mismas cuando ello sea posible, pasando irremediablemente por las representaciones asociadas.

7.1. Obtención de asociaciones sin repetición

Podemos aprovechar situaciones escolares y sociales, como son las de celebración de las fiestas de carnaval por ejemplo, para diseñar situaciones didácticas a propósito de este tema.

a) *Situación de introducción: formación de pares, ternas, cuaternas, etc.*

Veamos una posibilidad: se ha decidido que en las fiestas de carnaval de este año todos los alumnos de la escuela se vistan de Harry Potter. Por ello, nuestro grupo ha sido encargado de fabricar tres máscaras (todas distintas) y cuatro

trajes (todos distintos) relacionados con el personaje. Materializar las formas distintas en que podremos vestir al personaje elegido este año. ¿Cuántas máscaras y cuántos trajes tendremos que construir, en consecuencia, para materializar todos los disfraces posibles?

La gestión didáctica de la situación exigirá, dado el nivel de enseñanza en que nos situamos, la consideración de los siguientes pasos en la resolución de la situación propuesta.

1) *Gestión de la variable didáctica «material de que dispone el alumno»*

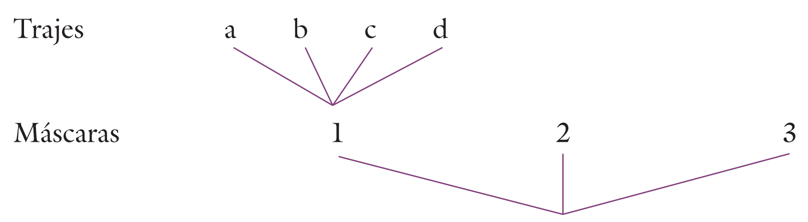
El inicio de la resolución de la situación propuesta ha de tener en cuenta esta variable, dado el nivel de enseñanza en que nos situamos y, por ello, sería conveniente que se proporcionase a ciertos grupos de alumnos bocetos de las tres máscaras y de los cuatro trajes (más de las que se necesita construir, en cada caso), para que ellos pudiesen proceder a la materialización de todos los disfraces posibles, y a otros grupos, un solo boceto de cada máscara y de cada traje posible.

2) *Gestión de la variable didáctica «organización de la clase»*

Paralelamente a la anterior se tendría que gestionar esta variable organizando la clase por ejemplo «en parejas», de forma que algunas dispusiesen de la multiplicidad de bocetos y que otras dispusiesen sólo de un ejemplar de cada boceto distinto.

Distintas representaciones posibles serían:

– La representación tipo árbol



Si los trajes son a, b, c y d y las máscaras 1, 2 y 3

– La representación tipo tabla de doble entrada

	A	B	C	D
1				
2				
3				

La gestión simultánea de estas dos variables didácticas llevaría a ciertas parejas a proceder a la formación de asociaciones materializadas y a otros grupos a la

representación correspondiente de asociaciones. Una puesta en común parecería entonces obligatoria para sacar conclusiones sobre la regla de formación.

3) Gestión de la variable didáctica «magnitud de los números presentes»

La gestión de esta variable llevaría a completar la situación, por ejemplo, con una pregunta del tipo:

«¿Cuántos tipos distintos de máscaras y cuántos tipos distintos de trajes tendríamos que considerar para que tuviésemos suficientes para disfrazarnos los 23 que somos en clase?»

Ésta es una variable didáctica fundamental para llegar a la elaboración de la fórmula general que nos proporciona el número de asociaciones posibles. Creemos que en esta situación de introducción no sería difícil llegar a la fórmula general.

Parece obvio que la extensión desde esta formación de pares a la formación de ternas, cuaternas, etc. debería seguir itinerarios semejantes.

Actividad 1: Elaborar una situación que tenga como contexto la formación de ternas con un contexto en que intervengan lápices, pinturas y tizas. Hacerla evolucionar desde un número pequeño de elementos hasta un número grande pero manejable (con un número de ternas total menor o igual que 120).

Señalar la gestión de las variables didácticas que intervienen.

b) *Situaciones propias de asociaciones sin repetición. Las combinaciones*

Situándonos en el mismo contexto de la situación anterior, se puede aprovechar la formación de parejas de alumnos para la organización de la clase. La situación sería la siguiente:

«Elegimos a 5 alumnos de la clase (se dan los nombres) Tenemos que averiguar cuántas parejas distintas se pueden formar con esos 5 alumnos».

1) Consideración preliminar: la importancia de la variable didáctica «número de conjuntos generadores de los elementos a combinar»

En la situación anterior partíamos de dos conjuntos claramente diferenciables (máscaras, trajes), mientras que ahora partimos de un solo conjunto (de 5 alumnos) y se trata de formar las asociaciones (parejas), perteneciendo los componentes de la pareja a un mismo conjunto. Éste constituye un salto cualitativo importante en la formación de agrupaciones y se podría conectar a una variable didáctica típica y propia del entorno combinatorio como es la que rige

el cambio desde un número dado de conjuntos de los que se eligen los elementos a combinar a un solo conjunto de elección de tales elementos. Es precisamente la asignación de este último valor (un solo conjunto) a esa variable didáctica el que supone la entrada en el tipo clásico de situaciones combinatorias.

2) Tipo de problema combinatorio: la obtención de muestras sin repetición de elementos

Conviene, desde el principio, enfrentar a los alumnos a dos tipos de problemas combinatorios: aquellos en que puede darse una repetición de elementos en la formación de las diversas asociaciones que se obtienen y aquellos en que eso no es posible. Aquí estamos ante uno de estos últimos ya que si se trata de formar parejas de alumnos es imposible que un mismo alumno se pueda repetir en una pareja dada. Cada pareja tendrá que estar constituida por pares de elementos distintos. No sería ése el caso si se tratara de averiguar las parejas distintas que se obtienen al lanzar dos dados. Aquí sí que se podrían dar pares como (1,1) o (5,5).

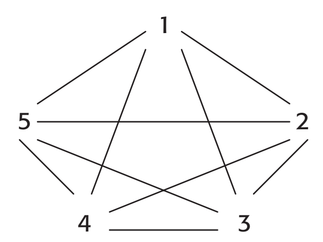
Este tipo de asociaciones, grupos, muestras obtenidas con tales situaciones se denominan *combinaciones.*

3) La gestión de otras variables didácticas

Es evidente que también en este caso se podrían manejar otras variables didácticas al igual que en el apartado a). Resultan fundamentales variables como: el material de que dispone el alumno (aquí los propios alumnos forman parte del material, en un principio), la organización de la clase o el número de elementos del conjunto referencial. Esta última añade interés a lo ya dicho anteriormente sobre ellas; en el apartado a) era bastante fácil llegar, a través de la gestión de esta variable, al cálculo total (multiplicación del número de elementos de cada conjunto) de todas las posibilidades de asociación y, sin embargo, eso mismo será mucho más difícil en la situación que planteamos ahora. El aumento del número de elementos del conjunto referencial dificultará la formación del número total de parejas e imposibilitará, para los alumnos de estas edades, el cálculo de ese número, según afirman todos los expertos en el tema (véase Díaz Godino y Batanero[6]).

También debemos reseñar que al trabajar con un único conjunto que nos proporciona los elementos para combinar entre sí y gestionar adecuadamente la variable didáctica «material de que dispone el alumno», de forma que el alumno tenga que producir una representación de las combinaciones posibles, se daría lugar a un nuevo tipo de representación, la representación mediante un grafo:

[6] Véase Díaz Godino, J. y Batanero, C. (1987): *Azar y probabilidad*, Síntesis: Madrid.



Actividad 2: Plantear una situación en que haya que formar todas las combinaciones posibles, tomando como contexto de desarrollo de la situación los juegos del recreo. Especificar el uso que se prevé para la variable didáctica: número de elementos del conjunto referencial. ¿Cuál sería el valor máximo que se le daría a ese número para que los alumnos de su clase llegaran a formar todas las combinaciones posibles?

c) *La consideración del orden en las asociaciones formadas. Las variaciones y las permutaciones*

Para que el planteamiento de una situación muestre lo que pretendemos en este apartado, nos vamos a situar en el contexto de la clase:

> Se han establecido en la clase 4 ambientes distintos para la resolución de problemas: el de los problemas de cálculo, el de los problemas geométricos, el de los problemas de medida y el de los problemas de combinatoria. Juan, Pedro, Jorge y Antonio son cuatro niños de la clase a los que le ha tocado hoy resolver problemas en esos ambientes. ¿De cuántas formas distintas se pueden distribuir en esos ambientes Jorge y Antonio, si cada uno ha de resolver un tipo distinto de problemas?

1) Primer subrayado importante: el tipo de problema combinatorio que se está pretendiendo introducir, las variaciones

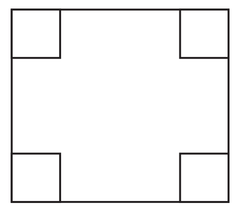
Una actividad irrenunciable, para probar la comprensión del enunciado de la situación-problema por parte de los alumnos, debe hacerse explícita a través del planteamiento de preguntas como la siguiente: ¿es lo mismo que Antonio esté resolviendo problemas de geometría y Jorge de cálculo que al contrario? Tales preguntas deberían entrenar al niño para la consideración del orden en tal tipo de situaciones. Es precisamente este aspecto del orden el que caracteriza un nuevo tipo de problemas combinatorios, son aquellos problemas que en la teoría correspondiente se llaman problemas de *variaciones*.

2) La importancia decisiva de la variable didáctica «material del que dispone el alumno»

En este tipo de situaciones introductorias a los problemas combinatorios de variaciones, es necesario, en un primer momento, que el alumno vea materializada la situación de forma que puede darse cuenta de la intervención del orden, por

una parte, y de la formación de las distintas agrupaciones que se pueden hacer con los dos alumnos que se combinan para trabajar los distintos tipos de problemas.

Será una intervención posterior sobre esta misma variable la que forzará el uso de representaciones gráficas si se le proporcionan al alumno copias representativas de la situación de los distintos ambientes, en número suficiente (siempre hay que darle más que el número de agrupaciones distintas que se puedan obtener). Por ejemplo, la representación podría ser:



donde las cuatro esquinas representan a los cuatro ambientes distintos. En cada copia se trata de poner las iniciales de los dos nombres, de forma que al final se obtengan todas las agrupaciones posibles.

Una posterior y última intervención sobre esta variable didáctica, dejándoles sólo lápiz y papel, podría dar lugar a una representación más abstracta de las agrupaciones posibles, por ejemplo del tipo: (J, , , A).

No nos parece conveniente repetir aquí la gestión sobre otras variables didácticas, como la de la organización de la clase, para llegar a todas las variaciones posibles, o sobre la magnitud de los números que intervienen para llegar a la formación de todas las variaciones posibles y a la imposibilidad de obtención de la fórmula general en cualquier caso.

3) Un caso particular de variaciones, las permutaciones

La obtención de este tipo particular de variaciones se conseguirá, precisamente, a partir de la gestión de esta última variable que hemos mencionado al igualar el tamaño de las agrupaciones que se han de realizar con el número de elementos que intervienen en la formación de esas agrupaciones. La situación propuesta se transformaría fácilmente en un problema de permutaciones si planteasemos:

¿De cuántas formas se pueden distribuir los cuatro niños en los cuatro ambientes mencionados?

Actividad 3: Describir los pasos que se deben seguir en la gestión de la variable didáctica «magnitud de los números que intervienen» para pasar de un problema de variaciones a uno de permutaciones, centrados en el ambiente familiar del alumno.

7.2. Obtención de asociaciones con repetición

Para completar el panorama de los principales resultados de combinatoria, tenemos que considerar asociaciones en que se pueda dar una repetición de elementos en las asociaciones que se puedan formar. A esto habíamos aludido de pasada en el punto anterior.

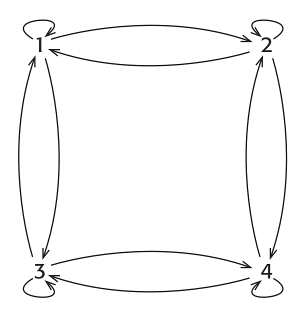
Centrándonos como hasta ahora en el mundo próximo al alumno, podemos sugerir una situación como la siguiente:

> **«Para la fiesta de fin de curso se ha elegido, entre los alumnos que mejor saltan de la clase de 4º A, a 3 alumnos (Jorge, Pedro y Antonio) y a 3 alumnas (Jessica, Paloma y Beatriz), para realizar un campeonato de saltos de longitud. Cada uno de ellos debe realizar dos saltos, sin haber establecido un orden de salto. Describir las parejas distintas que pueden realizar los dos primeros saltos»**

Evidentemente, la formación de parejas da lugar a que se formen éstas con una misma persona ya que los dos primeros saltos los puede realizar un mismo alumno(a). Con ello se obtienen una serie de variaciones que llamaremos con repetición ya que un mismo grupo puede estar formado por dos elementos iguales.

Conviene destacar el papel de la variable didáctica «material de que dispone el alumno» ya que una gestión adecuada de la misma por parte del maestro, dará como resultado diversas representaciones que reflejen la formación de las distintas parejas, siempre que llegue un momento en que esa variable se concrete en que el alumno disponga sólo de lápiz y papel para dar paso a la formación exigida.

Entre tales representaciones, queremos poner el acento sobre una en particular: la representación tipo grafo ya que, a diferencia de la correspondiente en las variaciones con repetición, en ésta aparecerán bucles al tener que representar la pareja que forma cada uno consigo mismo.



8. Proposición de una secuencia didáctica para desarrollar las primeras ideas de probabilidad en los alumnos de Primaria

La elaboración de una secuencia didáctica sobre la probabilidad, para alumnos de Primaria, debería tener en cuenta una progresión que partiendo de los fenómenos aleatorios nos llevase a la asignación de las probabilidades asociadas a tales fenómenos. En ella habría que tener en cuenta el auxilio que puede prestar, en todo momento, el cálculo combinatorio abordado anteriormente, para determinar sobre todo los sucesos asociados a un experimento aleatorio.

8.1. La construcción de una maqueta para el planteamiento de fenómenos aleatorios, con una determinación primaria de la probabilidad

Del mismo modo que se actúa en todas las magnitudes medibles[7], se necesita contar con un material didáctico que facilite la concreción de los experimentos aleatorios. A este material didáctico se le llamará maqueta de la probabilidad y será el material que se utilizará para plantear las distintas situaciones en torno a los experimentos aleatorios y a las probabilidades asociadas a los experimentos del mismo.

Parece evidente que dicha maqueta deberá estar constituida por toda una serie de materiales susceptibles de generar fenómenos aleatorios. Por ello los componentes de dicha maqueta deberían ser:

– Dados de diferentes formas: cúbicos, tetraédricos, dodecaédricos, etc.
– Monedas en que se pueden distinguir dos partes diferenciables
– Juegos de cartas: de 32 cartas, de 40 cartas, de 52 cartas…
– Ruletas con diferente número de sectores
– Bolas o fichas con diferentes colores o números para ser extraídas de una bolsa opaca
– Figuras geométricas divididas en zonas cuya relación superficial es bastante evidente
– Peonzas con varios sectores y susceptibles de caer, en su movimiento de giro, sobre uno de esos sectores
– Dianas con diferente número de círculos concéntricos

[7] Véase [en Chamorro, M. C. y Belmonte, J. M. (1988): *El problema de la medida*, Madrid: Síntesis] todo lo relativo a la construcción de maquetas para trabajar en una magnitud.

– Recorridos con cruces donde hay varias posibilidades de elección
– Loterías, quinielas, etc.

Es decir, una serie de materiales que permiten generar una serie de sucesos aleatorios a los que se puede asignar una probabilidad.

Por ello, en cada una de las situaciones componentes de esta secuencia didáctica, propondremos el uso de uno o varios de esos materiales ya que éstos nos proporcionarán el grado de concreción necesario para el planteamiento de esas mismas situaciones.

8.2. La percepción del azar: fenómenos aleatorios y fenómenos deterministas

Los niños de los primeros niveles de Primaria poseen con anterioridad, una idea inicial sobre la existencia de experimentos sobre los que se puede elaborar una hipótesis de resultados asociados y otros en los que tal previsión no es posible. La influencia del entorno social (juegos, medios de comunicación, sobre todo la televisión, apuestas sobre resultados deportivos, etc.) va instalando en la mente del niño la idea de que hay experimentos para los cuales no es posible decir, con toda seguridad, lo que se va a verificar.

Proponemos pues, para comenzar, someter a los alumnos a una batería de experimentos, para que ellos determinen si están seguros o no del resultado de los mismos.

Aquí presentamos una posible proposición de experimentos y de preguntas al respecto:

- Si acercamos una llama a un papel, ¿qué pasa? ¿Estamos seguros de lo que va a pasar?
- Si lanzamos una moneda al aire, ¿qué resultados podemos obtener? ¿Estamos seguros de lo que va a salir?
- Y si lanzamos un dado, ¿podemos decir con toda seguridad que saldrá un 6?
- Vamos al parque temático, ¿te dejan entrar si no tienes entrada?
- Si nos hemos perdido en la excursión que ha organizado la escuela y llegamos a un cruce en que hay tres caminos, ¿podremos decidir con toda seguridad qué camino tomar?

La puesta en situación tiene que dar como resultado la existencia de dos tipos de situaciones que se contraponen: aquellas en que el resultado se puede colegir con toda seguridad (experimentos deterministas) y aquellas donde no es posible determinar un resultado dado (experimentos aleatorios).

Actividad 4: Plantear una serie de situaciones que den lugar a la distinción entre experimentos aleatorios y experimentos deterministas.

8.3. La determinación de resultados asociados a un experimento aleatorio

Se puede comenzar perfectamente planteando directamente a los alumnos una situación como:

> «Al lanzar dos dados, ¿qué parejas de números podemos obtener?, ¿cuántas son en total?»

a) *La «puesta en escena» de la situación*

Una gestión adecuada de la variable didáctica «material del que dispone el alumno» tendría que imponer que el alumno dispusiese, en el inicio, de los dos dados para generar de una forma práctica todos los resultados posibles.

La gestión posterior de esa misma variable aconsejaría la retirada del material y la elaboración de una consigna que obligase al niño a usar otros medios de obtención de esos resultados. Tal consigna podría ser la siguiente:

> **Hemos dividido la clase en parejas. En cada pareja uno de los componentes de la misma debe pasar a su compañero(a) la información necesaria para que sepa todos los resultados que se pueden obtener al lanzar dos dados. Para ello disponéis sólo de lápiz y papel.**

Es previsible que el trabajo anterior sobre la secuencia planteada para la introducción de las ideas de combinatoria les impulse a utilizar una simple fila o columna de resultados posibles agrupados por parejas o los distintos medios de representación que se habían usado allí (tablas, diagramas de árbol, grafos). La emergencia de cualquiera de estos métodos de designación debería ser completada con una consigna suplementaria que obligase al receptor del mensaje a elaborar un mensaje distinto para llegar al mismo resultado, con discusión posterior sobre la pertinencia de los mensajes enviados. De esta forma se podrían obtener, para una misma situación, distintas formas de representación adecuada.

b) *La dificultad de distinción de parejas distintas de números*

En la obtención de todos los resultados posibles asociados a la situación aleatoria planteada surgirá muy pronto la consideración, como un solo resultado, de dos resultados distintos: los asociados a las parejas de números en que las cifras numéricas aparecen en distinto orden en la pareja, por ejemplo (3,4) y (4,3). Efectivamente, la experimentación que se emprende al lanzar dos dados impulsa a considerar ese resultado como único, sobre todo en el caso en que se lancen ambos dados a la vez. Entonces, para la obtención de todos los casos posibles habría que:

1) Gestionar la variable didáctica ya mencionada en el apartado a) para que una vez llegados a una fila o columna de pares de resultados, se pasase a otros tipos de representación planteando, por ejemplo, el intercambio de mensajes que se sugería en el final del mismo apartado y una representación gráfica, como las mencionadas, podría introducir y generar la discusión

sobre esas parejas de números distintas porque los números aparecen en ellas colocados en orden distinto.

2) Transformar la situación dada en una nueva, donde los dos números de cada pareja tuviesen una significación distinta. Por ejemplo,

Se dispone de un juego de la oca, pero se va a jugar con dos dados que se lanzan sucesivamente uno detrás de otro. El número que sale en el primer dado hace avanzar, el que sale en el segundo, hace retroceder (no se puede retroceder más allá de la salida). ¿Cuántas veces tendría que tirar, como mínimo, ambos dados para pasar de una casilla «a» a una casilla «b»? ¿Con qué pares de resultados podría hacer ese tránsito? (Las demás reglas del juego se mantienen).

La transformación de la situación carga de significado a los dos componentes de la pareja de números y obligaría a considerar como distintas las parejas en que los mismos números aparecen en orden inverso, por ejemplo (2,5) y (5,2).

Cambiando de discurso, podemos mencionar la posible gestión de la variable «organización de la clase» para obtener, también así, todas las posibles parejas de números.

El conjunto de todas las parejas asociadas a ese experimento aleatorio del lanzamiento de dos dados es el conjunto de *sucesos elementales* asociados al experimento aleatorio.

8.4. La generación de otros sucesos asociados a un experimento aleatorio

Si en el caso que hemos planteado últimamente sobre el juego de la oca, cambiásemos la regla que determina la influencia de los dos dados y la estableciésemos del modo siguiente:

Se lanzan los dos dados simultáneamente y se avanza tantos lugares como indica la suma de los dos dados,

se generaría otra serie de sucesos ya que habría que atender a la suma obtenida entre las puntuaciones de ambos dados. Estos nuevos sucesos son *sucesos compuestos* a partir de los sucesos elementales anteriores, ya que a efectos prácticos de lo que se trataría es de tener en cuenta todas las posibilidades de suma que se generan al realizar el mismo experimento aleatorio del lanzamiento de dos dados. Como ejemplo ilustrativo, podemos mencionar que el suceso «sumar 7», se obtiene de la composición de los sucesos elementales: sacar (1,6), sacar (6,1), sacar (2,5), sacar (5,2), sacar (3,4) y sacar (4,3).

A efectos didácticos se le pueden plantear a los alumnos preguntas relacionadas con tales sucesos compuestos, como: ¿hay más posibilidades de obtener una suma de 7 o una suma de 12?, ¿cuántas posibilidades hay de sacar como suma 12? ¿y como suma 2?, ¿qué es más posible, que obtenga una suma 7 o una suma 8?, etc. Todas estas preguntas contribuirán a la comprensión de la situación planteada como veíamos en el capítulo 10, cuando se planteaba que el trabajo sobre la comprensión de un problema se podía emprender, a nivel didáctico, a través de

una serie de preguntas sobre el enunciado que diesen una idea al maestro del grado de comprensión del mismo por parte de sus alumnos.

Parece evidente que se podrían plantear también preguntas como: ¿qué posibilidades tenemos de sacar como suma 1?, o ¿qué posibilidades tenemos de sacar como suma un número comprendido entre 2 y 12, ambos incluidos? Tales preguntas darían lugar a dos sucesos que se encuentran asociados a cualquier experimento aleatorio: *el suceso imposible y el suceso seguro*, y ambos tendrán que ser considerados en cualquier experimento aleatorio, ya que la experiencia social de los alumnos de Primaria supone el manejo de ambos tipos de sucesos, como se puede detectar al seguir sus comentarios al referirse a cualquier experimento de tal tipo. Los términos *imposible* y *seguro* se utilizan profusamente en todas aquellas situaciones que les enfrentan, aunque sea de modo inconsciente, al mundo aleatorio.

Actividad 5: Plantear una situación que se desarrolle tomando como material una baraja española y que se concrete en un juego donde en cada lance cada jugador tome dos cartas y actúe con ellas en el juego. Determinar entonces los sucesos elementales asociados a esa extracción aleatoria de dos cartas y los sucesos compuestos que se deriven de la regla del juego que indica cómo se actúa con ambas cartas para practicar el juego. Poner algún ejemplo de suceso imposible y de suceso seguro, que tengan sentido en el contexto de la situación[8].

8.5. La medida elemental asociada a un experimento aleatorio: la determinación de las frecuencias absoluta y relativa de un suceso

En cualquier experimento aleatorio, una vez determinados los sucesos elementales asociados al mismo y otra serie de sucesos que tengan que ver con las situaciones particulares en las que intervenga tal experimento aleatorio, es preciso *contar* el número de veces que aparece el suceso considerado en cada ocasión, con vistas a determinar las posibilidades de aparición de cada suceso, en una situación que por su propio carácter no permite deducir resultados establecidos de antemano.

Para la introducción didáctica a los conceptos (*frecuencias absoluta y relativa de un suceso*) que estamos pretendiendo asociar a cualquier experimento aleatorio, se podría diseñar una situación como la siguiente:

> Para determinar quién distribuirá hoy los cuadernos de problemas, cada uno de vosotros lanzará diez veces una moneda de un euro, ante todos los demás. Ganará quién obtenga más caras en sus diez lanzamientos.

[8] Se considera beneficioso, a nivel didáctico, practicar cada uno de los juegos asociados a las situaciones descritas o a cada una de las actividades planteadas, para asegurar la motivación del alumno y para ponerle en contacto con el contexto que describe cada situación particular.

El carácter a-didáctico de la situación está asegurado al plantear a los alumnos una situación cuyo método óptimo de resolución se concreta en la utilización de un concepto que ya habrán adquirido anteriormente: el de *contar*. Por otra parte, es conveniente que los resultados de dicha cuenta se materialicen y, al respecto, no será muy difícil encontrar un medio para el registro de resultados como el que puede constituir una tabla donde figuren los nombres de todos ellos.

El simple recuento de los casos en que aparece el resultado propuesto constituirá un índice que sirve a efectos prácticos, pero que no indica nada a efectos de determinar las distintas posibilidades de verificación que tiene el suceso «sacar cara» asociado al experimento aleatorio del lanzamiento de una moneda. La consecuencia, a nivel didáctico, es evidente: ¿cómo transformar una situación propuesta para que dé un índice de las posibilidades de aparición de un suceso?

a) *La pertinencia de considerar la frecuencia relativa como primer índice para medir las posibilidades de que un suceso dado se verifique*

La gestión de una variable didáctica como es *el número de veces que se repite un experimento aleatorio* debe provocar un cambio en las estrategias para determinar en qué caso hay más posibilidades de que se verifique un determinado suceso.

Supongamos entonces que la situación anterior la transformásemos de la siguiente forma:

> **Hoy distribuirá los cuadernos quién tenga mayores posibilidades, en cada lanzamiento, de que le salga cara al lanzar una moneda de un euro, pero unos lanzaréis la moneda 10 veces y otros 20 veces.**

La aclaración que seguramente se necesitará para comprender la nueva situación deberá llevar al maestro a formular preguntas como las siguientes, antes de dar paso a la práctica de los lanzamientos y a la obtención de consecuencias: ¿Creéis que la situación planteada es justa? ¿Quiénes tendrán más posibilidades de que les «salga cara», los que disponen de 10 lanzamientos o los qué disponen de 20 lanzamientos? ¿Dependen esas posibilidades del número de lanzamientos que se realizan?, etc.

Se trata pues de hacerles comprender, en principio, que las posibilidades no cambian al variar el número de veces que se realiza un experimento aleatorio.

Pero además tendrán que comprender que esas posibilidades van a estar regidas por la relación que exista entre el número de veces que ha aparecido un suceso determinado y el número de veces que se ha realizado el experimento. Para ello vamos a proponer la situación siguiente:

La maestra dispone de una serie de cromos y comunica a sus alumnos que pueden ganarlos cada vez que tiren una moneda y les salga cruz, o cada vez que tiren un dado y les salga 6. En cualquiera de los dos casos ganarán 3 cromos. Cada alumno podrá realizar como máximo cinco tiradas, pero antes de tirar deben decidir si emplear la moneda o emplear el dado y, además, por cada tirada que quiera realizar deberá devolver a la maestra un cromo. ¿Cuál será la mejor estrategia para ganar el número máximo de cromos?

Situaciones de este tipo en que se necesite tener en cuenta no sólo las veces que aparece un resultado sino también el número de veces que se realiza el experimento aleatorio y, por tanto, la relación que existe entre ambos números, son fundamentales para introducir la *frecuencia relativa* de un suceso dado, que vendrá dada por esa relación y que se podrá expresar en forma de una fracción cuyo numerador sea la frecuencia absoluta y cuyo denominador sea el número total de pruebas realizadas.

Una gestión adecuada de estas situaciones exigirá la búsqueda de medios de registro de los datos que vayan apareciendo y, por supuesto, el medio clásico de lograr esas representaciones es la tabla en que aparezcan cada suceso elemental contemplado, la correspondiente frecuencia absoluta y, por último, la frecuencia relativa. A esos medios de registro irán asociadas representaciones que reflejen las frecuencias absolutas o relativas, normalmente representaciones tipo barra.

b) *El aumento del número de pruebas como forma de intuición de la probabilidad, a través del cálculo de las sucesivas frecuencias relativas*

Convendrá, en este punto de la secuencia didáctica, plantear toda una serie de experimentos donde se multiplique el número de pruebas, con el fin de intuir la tendencia de la frecuencia relativa de cada suceso considerado y así llegar a la intuición de la regla de Laplace que nos da la probabilidad del suceso correspondiente.

Consideremos, entre los numerosos experimentos que se podrían tomar como ejemplo, el siguiente:

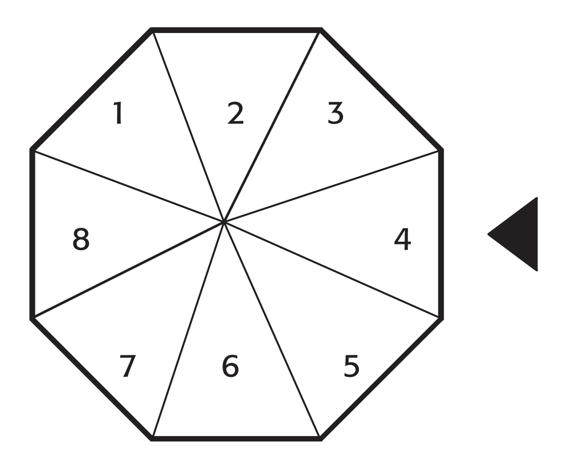
Disponemos de una ruleta como la de la figura y vamos a girarla 20 veces. Anotamos los resultados obtenidos y sus correspondientes frecuencias absolutas y relativas.

A continuación nos agrupamos en grupos de 4, y cada grupo la girará 30 veces. Anotaremos lo mismo que antes, teniendo en cuenta los resultados de todos los grupos.

Por último nos agrupamos por parejas y cada pareja la girará 50 veces. Entre todos anotaremos lo mismo que antes, pero recogiendo lo obtenido por todas las parejas.

La tabla correspondiente para anotar los resultados y las correspondientes frecuencias sería:

Ruleta:



Nota: Si la flecha apunta a la raya divisoria entre dos sectores, se vuelve a girar otra vez, contando entonces un solo giro.

Resultado	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

Se utilizará una de estas tablas cada vez que se realiza el experimento, con el fin de reflejar las distintas frecuencias a medida que va aumentando el número de veces que se abordase el mismo. Por supuesto en cada una de ellas se reflejaría el resultado obtenido por toda la clase.

La observación de la variación de las frecuencias relativas asociadas a cada suceso elemental, una vez que tenemos en cuenta sólo la última columna de cada una de las tres tablas, debería dar una idea aproximada del valor hacia el que tienden las mismas si vamos aumentando el número de experiencias, y por tanto, a partir de ello se podría intuir la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales derivados de esa experiencia.

Así, para cada suceso dado del experimento aleatorio empleado, se podrá intuir que las frecuencias relativas se van aproximando a 1/8, dando entonces un sentido primario a la regla de Laplace que establece cómo se halla la probabili-

dad de un suceso: es la fracción con numerador el número de casos favorables al suceso dado y cuyo denominador es el número de casos posibles en el experimento.

Actividad 6: Plantear un experimento aleatorio con 2 monedas y la multiplicación necesaria de pruebas para que se llegue a determinar las probabilidades asociadas a cada uno de los sucesos elementales asociados al experimento planteado.

8.6. El segmento de las probabilidades

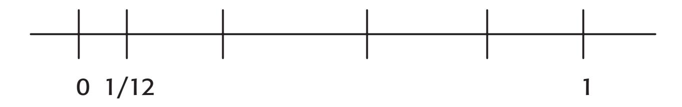
Según lo que acabamos de ver la probabilidad de un suceso vendrá dada por una fracción cuyo numerador es siempre menor que el denominador y, por tanto, es siempre un número menor que 1.

Ahora bien, tal resultado debería de ser deducido del planteamiento de situaciones que confirmasen ese resultado general. He aquí una posible situación con ese objetivo:

> Se lanza un dodecaedro que tiene un número en cada cara, desde el 1 hasta el 12. Se toma como resultado del lanzamiento aquel sobre el que se apoya el dodecaedro. ¿Qué probabilidad hay de que salga 15? ¿Qué probabilidad hay de que salga uno de los 12 primeros números? ¿Qué probabilidad hay de que salga un 5?

El lanzamiento físico repetido del dado dodecaédrico mostrará los resultados que se obtienen y, por tanto, no será muy difícil que el alumno intuya la probabilidad del suceso imposible (un posible enunciado de tal suceso es el que aparece en la situación planteada, ya que es imposible que aparezca un número que no está en el dado), que intuya también que la probabilidad del suceso seguro es 1 y que las demás probabilidades (aquí nos limitamos a los sucesos elementales asociados al lanzamiento) son siempre números comprendidos entre 0 y 1.

Este resultado sobre las probabilidades se podría extender a cualquier experimento aleatorio que se considerase y por ello se podría considerar un segmento representativo de las probabilidades asociadas:

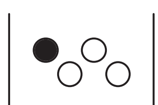
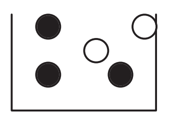
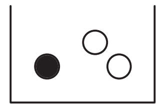


Para dotar de sentido a otras probabilidades que se podrían dar, como asociadas al experimento planteado, se puede intentar que los alumnos respondan a preguntas multirespuesta como: ¿qué suceso tendría una probabilidad muy próxima a 1? ¿Y un suceso con una probabilidad próxima a 0?

8.7. Comparación de probabilidades

Ante la intuición de la probabilidad que es posible conseguir en el nivel de Primaria, conviene plantear situaciones que den lugar a una comparación de probabilidades. Una muestra de tales situaciones podría ser la siguiente:

> Disponemos de las tres urnas de la figura. Se saca una bola de cada urna, ¿en cuál hay mas probabilidad de sacar bola blanca? La bola negra, dónde tiene más probabilidades de ser obtenida, ¿en la urna 2 o en la urna 3?

El planteamiento de estas situaciones debe estar acompañado por la realización física, repetida en múltiples ocasiones, ya que así se dará una justificación práctica a las respuestas que se intuyan a partir del concepto primario de probabilidad al que se puede llegar en estas edades.

Es fundamental la gestión de una variable didáctica como «la composición de las urnas a comparar», ya que en cualquier caso la comparación tiene sólo sentido si se generan dudas razonables sobre los elementos a comparar. Desde este punto de vista, sería absurdo el planteamiento de una situación de comparación de probabilidades entre dos urnas cuyo contenido fuese, por ejemplo: en una 10 bolas rojas y 1 bola blanca y, en la otra, 1 bola blanca y 1 roja.

Actividad 7: Plantear otras preguntas de comparación de probabilidades en la situación de las tres urnas dada en este enunciado.

BIBLIOGRAFÍA

Díaz Godino, J. y Batanero, C. (1987): *Azar y probabilidad*, Síntesis: Madrid

Engel, A.(1975): *L'enseignement des probabilités et de la statistique*, CEDIC: París. (Tomo 1)

Fischbein, E. (1975): *The intuitive sources of probability thinking in children,* D. Reidel, Dordrecht.

Glaymann, M. y Varga, T. (1975): *Las probabilidades en la escuela,* Teide: Barcelona.

Bibliografía

BAROODY, A. (1988): *El pensamiento matemático de los niños*. Visor: Madrid.

BRISSIAUD, R. (1989): *El aprendizaje del cálculo*. Visor: Madrid.

BOSCH, M., CHEVALLARD, Y., GASCÓN, J. (1997): *Estudiar Matemáticas*. ICE-Horsori: Barcelona.

BRIAND, J., CHEVALIER, M. C. (1995): *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*. Hatier: París.

BROUSSEAU, G. (1991): *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage: Grenoble (existe versión inglesa en la misma editorial).

CENTENO, J. (1988): *Los números decimales. ¿Por qué?, ¿para qué?* Síntesis: Madrid.

CHAMORRO, M. C. (1991): *El aprendizaje significativo en el área de las matemáticas*. Alhambra-Logman: Madrid.

CHAMORRO, M. C. y BELMONTE, J. M. (1991): *El problema de la medida*. Síntesis: Madrid.

CHAMORRO, M. C. (ed.) (2000): *Dificultades del aprendizaje de la matemática*. MECD: Madrid.

CHAMORRO, M. C. (ed.) (2003): *Los lenguajes de las ciencias*. MECD: Madrid.

CHEVALLARD, Y. (1998): *La Transposición didáctica*. Aiqué: Buenos Aires.

D'AMORE, B. (1997): *Problemas*. Síntesis: Madrid.

ERMEL (1991): *Apprentissages numériques CP*. Hatier: París.

ERMEL (1993): *Apprentissages numériques CE1*. Hatier: París.

ERMEL (1995): *Apprentissages numériques CE2*. Hatier: París.

ERMEL (1997): *Apprentissages numériques CM1*. Hatier: París.

ERMEL (1999): *Apprentissages numériques CM2*. Hatier: París.

GIMÉNEZ, J. y GIRONDO, L. (1993): *Cálculo en la Escuela*. Graó: Barcelona.

HENRY, M. (1995): *Une presentation de la didactique en vue de la formation des enseignants*. IREM: Besançon.

IFRAH, G. (1997): *Historia Universal de las cifras*. Espasa-Forum: Madrid.

JONNAERT, Ph. (1988): *Conflits de savoir et didactique*. De Boeck: Bruselas.

KAMII, C. (1984): *El número en la educación preescolar*. Visor Aprendizaje: Madrid.

KAMII, C. (1985): *El niño reinventa la aritmética. Implicaciones de la teoría de Piaget*. Visor: Madrid.

KAMII, C . (1992): *Reinventando la aritmética II*. Visor: Madrid.

KAMII, C. (1994): *Reinventando la aritmética III*. Visor: Madrid.

LLINARES, S., SÁNCHEZ, V. (1993): Vídeo 3: *La comprensión del significado del número. Serie: Elementos del conocimiento base para la enseñanza de las matemáticas. Conocimiento sobre el aprendizaje y los aprendices. Contenido: Aritmética. Nivel: Enseñanza Primaria*. Secretario de Medios Audivisuales de la Universidad de Sevilla: Sevilla.

PARRA, C., SAIZ, I. (1994): *Didáctica de las matemáticas.* Paidós: México.

POLYA, G. (1982): *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas: México.

RESNICK, L. B., FORD, W. W. (1990): *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Paidós-MEC: Barcelona.

VERGNAUD, G. (1991): *El niño, las matemáticas y la realidad*. Trillas: México.

VERGNAUD, G. (1990): «La théorie des champs conceptuels», en *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* 10, 2.3, 133-170.

COLECCIÓN DIDÁCTICA PRIMARIA

Didáctica de las Matemáticas pretende clarificar algunos de los problemas de aprendizaje de las matemáticas, analizándolos a la luz de las teorías que configuran la moderna Didáctica de las Matemáticas como una ciencia moderna, avalada por numerosas investigaciones y que cuenta con un corpus de resultados que permiten dar respuesta a viejas y nuevas cuestiones sobre cómo aprender matemáticas. El estudiante universitario y el docente preocupado por mejorar su práctica y dar soluciones a los problemas de aprendizaje de las matemáticas de sus alumnos, encontrarán aquí la interpretación de algunos fracasos clásicos, así como la presentación de otros fenómenos didácticos menos evidentes que han pasado hasta ahora desapercibidos. Este manual pretende ayudar a la reflexión a la que todo docente se encuentra abocado, a la vez que proporciona pautas y soluciones para problemas viejos y desafíos nuevos, que son tratados desde una óptica estrictamente profesional, usando conocimientos fundados en los resultados de las investigaciones actuales.

La coordinadora de la obra, **Mª del Carmen Chamorro** es catedrática de Escuela Universitaria de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad Complutense de Madrid.

Otros libros de la colección:

- Didáctica de la Lengua y la Literatura para Primaria
- Didáctica de la Educación Física para Primaria
- Didáctica de la Música para Primaria
- Didáctica de la Educación Artística para Primaria
- Didáctica del Inglés para Primaria
- Didáctica de las Ciencias Sociales para Primaria

- Didáctica General



www.pearsoneducacion.com

ISBN 84-205-3454-4

9 788420 534541